1. Gegeben ist das Dreieck ABC[A$(0|0)$, B$(14|0)$, C$(9|12)$].
   (a) Berechne und konstruiere mit Hilfe der Winkelsymmetralen den Inkreismittelpunkt, seinen Radius und die Berührpunkte mit den Dreiecksseiten!
   (b) Berechne Umfang, Winkel und Flächeninhalt des Dreiecks!
   (c) Zeige, dass der folgende Ausdruck ebenfalls den Inkreismittelpunkt liefert!
   $$\frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$
2. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide liegt in der Ebene $\epsilon : 9x - 2y + 6z = 13$. Die Gleichungen der Trägergeraden zweier Seitenkanten lauten:
   $$g : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, h : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$$
   Die dritte Kante steht auf die Basisebene normal. (Skizze!)
   (a) Wie lauten die Koordinaten der 4 Eckpunkte der Pyramide?
   (b) Berechne die Grundfläche und das Volumen der Pyramide!
   (c) Ermittle den Winkel zwischen Grundfläche und jener Geraden, welche durch den Schwerpunkt der Grundfläche und die Spitze verläuft!
3. Das Viereck ABCD[A$(1|2|3)$, B, C, D$(-1|6|-1)$] ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Die Kante AB hat die Länge 6E und liegt auf der Geraden $g : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   (a) Bestimme die Normalvektorform der Ebene ϵ in der die Grundfläche liegt! Bestimme den Punkt B! (2 Lösungen)
   (b) Die Seitenkante SC der Pyramide liegt auf der Geraden $s : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme den Eckpunkt C und den Winkel, den die Seitenkante s mit der Grundfläche einschließt!
   (c) Die Spitze S liegt auf der Geraden s (von Teil b) und ist von A und D gleich weit entfernt. Berechne die Koordinaten von S und die Pyramidenhöhe!
4. Von einem gleichschenkeligen Dreieck ABC kennt man die Spitze C$(-3|2)$. Die Basis AB liegt auf der Geraden $g : x - 2y = 3$ und die Basislänge ist gleich der Höhe h_c.
   (a) Berechne den Fußpunkt der Höhe auf c und die Eckpunkte A und B!
   (b) Berechne Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und gib die Gleichung des Umkreises an! Ermittle den schnittwinkel der Geraden g mit dem Umkreis!
   (c) Ermittle die Gleichung der zur Geraden g parallelen Tangenten an den Umkreis!
   (d) Wie lauten die Koordinaten von $A_1 \in \epsilon$, wenn das Dreieck A_1BC ein rechtwinkeliges sein soll?
5. Vom Dreieck ABC kennt man den Punkt A$(-2|-4)$. Die Seite c ist parallel zur 1. Mediane. Weiters kennt man den Fußpunkt der Höhe auf die Seite a, E$(4|8)$ und den Fußpunkt der Höhe auf die Seite b, F$(-4|2)$. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte B und C, den Flächeninhalt, den Umfang und den Winkel γ dieses Dreiecks. Berechne auch das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das Dreieck ABC um die Seite c rotiert.

6. Gegeben sind die Punkte A$(-6|-2)$, B$(2|2)$ und C$(0|6)$ und die Gerade $g : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ermittle die Gleichung des Kreises, der durch A, B und C geht und die Tangenten t_1 und t_2, die zu g parallel sind. Berechne auch die Gleichung der Tangente t_3 in P$(-3|y > 0)$ und zeige: Schneidet die Tangente eines Kreises zwei andere zueinander parallele Tangenten in den Punkten S_1 und S_2, so ist der Winkel S_1MS_2 ein rechter Winkel (M = Kreismittelpunkt).

7. Gegeben sind die Punkte $P_1(9|-15|18)$, $P_2(-3|15|-6)$, $P_3(5|8|-15)$, eine Kugel mit M$(0|0|0)$, $r = 3\sqrt{5}$ und eine Gerade g durch P_1 und P_2.

   (a) Berechne die Schnittpunkte von g mit der Kugel!

   (b) Berechne die Ebenen ϵ_1, ϵ_2 welche die Kugel in den Schnittpunkten berühren, deren Schnittgerade sowie die Abstände des Punktes P_3 von ϵ_1 und ϵ_2.

   (c) Berechne das Volumen der dreiseitigen Pyramide $OP_1P_2P_3$.

8. Der gemeinsame Punkt der 3 Ebenen $\epsilon_1 : x + y = 4$, $\epsilon_2 : 2x - y - 3z = 5$, $\epsilon_3 : 3x + 2y + 4z = 1$ ist Mittelpunkt der Kugel, welche die Ebene $\epsilon_4 : x + 4y + 8z = -30$ zur Tangentialebene hat.

   (a) Bestimme die Kugelgleichung!

   (b) Welchen Winkel schließen ϵ_1 und ϵ_4 ein?

   (c) Bestimme die zu ϵ_4 parallele Tangentialebene an die Kugel!

9. Die Gerade $g : 3x - 4y + 3 = 0$ ist die Polare bezüglich des Kreises $k : (x-7)^2 + (y-2)^2 = 16$.

   (a) Berechne den Abstand des Pols vom Kreismittel, sowie von seiner Polaren.

   (b) Ermittle die Gleichung eines Kreises k_1, der durch den Pol geht, die y-Achse berührt und seinen Mittelpunkt auf der x-Achse hat.

LÖSUNGEN:

1. I$(8|4)$, $\rho = 4$, $T_1(11\frac{9}{13}|5\frac{7}{13})$, $T_2(4.8|6.4)$, $T_3(8|0)$, $u = 42$

2. (a) A$(1|4|2)$, B$(5|4|-4)$, C$(1|1|1)$, S$(10|-1|7)$

   (b) A=11, V=$40\frac{1}{3}$

   (c) $\alpha \approx 76°$

3. (a) $\epsilon : 2x + 2y + z = 9$, $B_1(-3|4|7)$, $B_2(5|0|-1)$

   (b) C$(3|4|-5)$, $\alpha \approx 54.7°$

   (c) S$(6|7|1)$, h=6

4. Vergleiche Zeichnung!

5. B$(8|6)$, C$(-8|14)$, A=120, V≈ 4265, $\gamma = 45$, u=51

6. M$(-3|2)$, r=5, $t_1 : y = \frac{3}{4}x - 2$, $t_2 : y = \frac{3}{4}x + \frac{21}{2}$, $t_3 : y = 7$

7. (a) $S_1(\frac{1}{3}|\frac{20}{3}|\frac{2}{3})$, $S_2(3|0|6)$

   (b) $\epsilon_1 : x + 20y + 2z = 135$, $\epsilon_2 : x + 2z = 15$, 0, $8\sqrt{5}$

   (c) V=375

8. (a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$

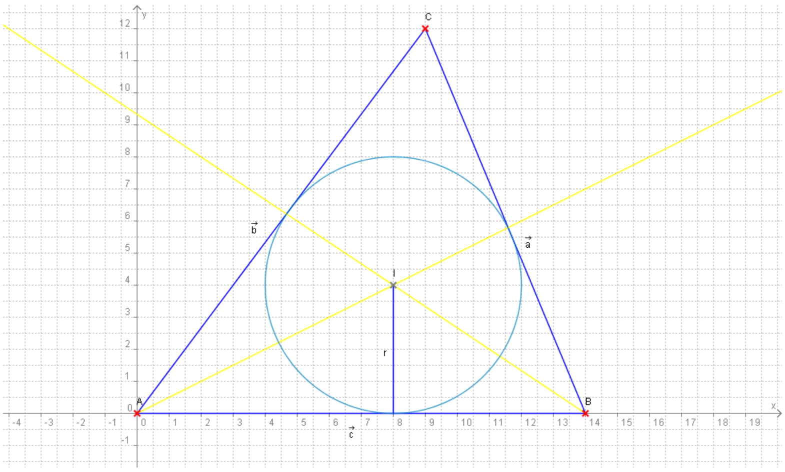
   (b) $\alpha = 66°52'$

   (c) $x + 4y + 8z = 24$

9. (a) P$(4|6)$, 5, $\frac{9}{5}$

   (b) $k_1 : (x - \frac{13}{2})^2 + y^2 = \frac{169}{4}$

1. (a) A(0|0), B(14|0), C(9|12)



$$\overrightarrow{AB} = \binom{14}{0} || \binom{1}{0}, \overrightarrow{BA} = \binom{-1}{0}, \overrightarrow{BC} = \binom{-5}{12}, \overrightarrow{CB} = \binom{5}{-12}, \overrightarrow{CA} = \binom{-9}{12} || \binom{3}{4}, \overrightarrow{AC} = \binom{-3}{-4}$$

$$\begin{aligned} w_\alpha : \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{w_\alpha} \\ \overrightarrow{w_\alpha} &= \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0} \\ \overrightarrow{w_\alpha} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_\alpha : \overrightarrow{OX} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_\beta : \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{w_\beta} \\ \overrightarrow{w_\beta} &= \overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{BC_0} \\ \overrightarrow{w_\beta} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-18}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_\beta : \overrightarrow{OX} &= \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_\alpha \cap w_\beta : 2r &= 14 - 3s \\ r &= 2s \\ \hline 4s &= 14 - 3s \\ 7s &= 14 \\ s &= 2 \qquad I(8|4) \end{aligned}$$

Radius: Da die Seite c auf der x-Achse liegt, ist Abstand von I zur Seite c gleich der y-Koordinate des Inkreismittelpunktes.

$$r = 4$$

Berührpunkte:

$$\begin{aligned} k :& (x-8)^2 + (y-4)^2 = 16 \\ a :& \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \\ b :& \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ c :& \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$k \cap a$:

$$
\begin{aligned}
(14-5r-8)^2+(12r-4)^2 &= 16\\
36-60r+25r^2+144r^2-96r+16 &= 16\\
169r^2-156r+36 &= 0\\
r^2-\frac{12}{13}r+\frac{36}{169} &= 0\\
r_{1,2} &= \frac{12}{26}\pm\sqrt{\frac{144}{676}-\frac{36}{169}}\\
r &= \frac{6}{13} \qquad\qquad T_1(\frac{152}{13}|\frac{72}{13})
\end{aligned}
$$

$k \cap b$:

$$
\begin{aligned}
(3s-8)^2+(4s-4)^2 &= 16\\
9s^2-48s+64+16s^2-32s+16 &= 16\\
25s^2-80s+64 &= 0\\
s^2-\frac{16}{5}s+\frac{64}{25} &= 0\\
s_{1,2} &= \frac{16}{10}\pm\sqrt{2,56-2,56}\\
s &= \frac{8}{5} \qquad\qquad T_2(4,8|6,4)
\end{aligned}
$$