Einführung in die Integralrechnung

Mag. Mone Denninger

13. November 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer reellen Funktion $f(x)$, wenn an jeder Stelle von D_f gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Das Aufsuchen einer Stammfunktion von $f(x)$ heißt **unbestimmtes Integrieren** und kann als Umkehroperation zum Differenzieren gedeutet werden.

$$\text{differenzieren} \downarrow \quad \begin{array}{c} f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x \end{array} \quad \uparrow \text{integrieren}$$

$f(x)$ … Stammfunktion (die Stammfunktion wird oft mit einem Großbuchstaben gekennzeichnet: $F'(x) = f(x)$.)
Schreibweise:

$$\int 2x \,\mathrm{dx} = x^2$$

<u>Problem</u>: Differenziere:

$$\left.\begin{array}{ll} y & = x^2 \\ y & = x^2 - 1 \\ y & = x^2 + 5 \\ y & = x^2 + C \end{array}\right\} \Rightarrow y' = 2x$$

Eine Ableitung kann mehrere (nur von einer Konstanten C unterschiedliche) Stammfunktionen haben.
<u>Allgemein:</u>

$$\underbrace{\overbrace{\int}^{\text{Integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{Integrand}} \overbrace{\mathrm{dx}}^{\text{Integrationsvariable}}}_{\text{unbestimmtes Integral}} = F(x) + \underbrace{C}_{\text{Integrationskonstante } (C \in \mathbb{R})}$$

2 Berechnung einfacher Stammfunktionen

Beispiel 1. $\int 1 \text{ dx} = \underline{\underline{x + C}}$

Beispiel 2. $\int x^3 \text{ dx} = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + C}}$

Beispiel 3. $\int k \cdot x^5 \text{ dx} = \underline{\underline{k \cdot \frac{x^6}{6} + C}}$

Beispiel 4. $\int \cos x \text{ dx} = \underline{\underline{\sin x + C}}$

2.1 Integrationsregeln

Umkehrung der Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$[1]

$$\int x^n \text{ dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \in \mathbb{Q}, n \neq -1)$$

Konstanter Faktor: $(k \cdot x)' = k$

$$\int k \text{ dx} = k \cdot x + C$$

allgemein: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

$$\int a \cdot f(x) \text{ dx} = a \cdot \int f(x) \text{ dx}$$

Summenregel: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\int f(x) \pm g(x) \text{ dx} = \int f(x) \text{ dx} \pm \int g(x) \text{ dx}$$

Trigonometrische Funktionen: Sinus und Kosinus

$(\sin(x))' = \cos x$

$$\int \cos x \text{ dx} = \sin x + C$$

$(\cos(x))' = -\sin x$

$$\int \sin x \text{ dx} = -\cos x + C$$

[1] Siehe Formelheft S24 + 25!!!

Spezialfall:

$$\int x^n \text{ dx für } n = -1:$$
$$\int x^{-1} \text{ dx} = \int \frac{1}{x} \text{ dx}$$

Welche Funktion ergibt abgeleitet $\frac{1}{x}$?

$$\int \frac{1}{x} \text{ dx} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

Beispiel 5. Berechne die unbestimmten Integrale! S16 1 2 3

$$\int x^7 \text{ dx} = \underline{\underline{\frac{x^8}{8} + C}}$$
$$\int \frac{x^9}{7} \text{ dx} = \underline{\underline{\frac{x^{10}}{70} + C}}$$
$$\int \frac{5}{6x^6} \text{ dx} = \int \frac{5}{6} \cdot x^{-6} \text{ dx} =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot x^{-5} \cdot \frac{1}{(-5)} + C =$$
$$= \underline{\underline{-\frac{1}{6x^5} + C}}$$

Beispiel 6 (4d). Das gegebene unbestimmte Integral ist zu berechnen! 4abc

$$\int \frac{7\sqrt[5]{x^2}}{3} \text{ dx} = \int \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{2}{5}} \text{ dx} =$$
$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C =$$
$$= \frac{7}{3}\frac{5}{7} \cdot x^{\frac{7}{5}} + C =$$
$$= \underline{\underline{\frac{5}{3} \cdot x \cdot \sqrt[5]{x^2} + C}}$$

Beispiel 7. Berechne das unbestimmte Integral! 7 8

$$\int (3x - 4\sin x + 3\cos x)\ \mathrm{dx} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}x^2 + 4\cos x + 3\sin x + C}}$$

Beispiel 8. Berechne das unbestimmte Integral!

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2}\ \mathrm{dx} = \int \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ \mathrm{dx} =$$
$$= \int 1 - x^{-2}\ \mathrm{dx} =$$
$$= x - \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$
$$= \underline{\underline{x + \frac{1}{x} + C}}$$

Beispiel 9. Berechne das unbestimmte Integral! 5 6

$$\int \left(x - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)\ \mathrm{dx} = \int x\ \mathrm{dx} - \int \frac{\sqrt{2}}{x}\ \mathrm{dx} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{x^2}{2} - \sqrt{2} \cdot \ln|x| + C}}$$

3 Bestimmtes Integral

Ist $f(x)$ eine auf $[a;b]$ beschränkte reelle Funktion und $F(x)$ auf $[a;b]$ Stammfunktion von $f(x)$, so wird dem Symbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ der Zahlenwert $F(b) - F(a)$ zugeordnet:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Man liest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ als „Integral von f von x dx zwischen (den Grenzen) a und b".
Man schreibt als Zwischenergebnis für $F(b) - F(a)$ auch $F(x)\big|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$.
Bei bestimmten Integralen wird wegen

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

die Stammfunktion F ohne Integrationskonstante C angeschrieben.

4 Umkehraufgaben

Wir haben beim Differenzieren in der 7. Klasse gelernt, dass man nicht nur nach x ableiten kann, sondern auch nach anderen Variablen. Selbige gilt beim Integrieren! Die Integrationsvariable gibt an, nach welcher Variable integriert wird.

Beispiel 10 (17). Welcher Interschied besteht zwischen $\int_0^1 ax^2 \text{ dx}$ und $\int_0^1 ax^2 \text{ da}$? 18 19

$$\int_0^1 ax^2 \text{ dx} = a \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = a \cdot \frac{1}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{a}{3}}}$$

$$\int_0^1 ax^2 \text{ da} = \frac{a^2}{2} \cdot x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}x^2 - 0 = \underline{\underline{\frac{x^2}{2}}}$$

Beispiel 11 (22b). Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung 22c 22d
$\int_0^x p \text{ dp} = 7$ in $\mathbb{R}$!

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2}\Big|_0^x &= 7 \\ \frac{x^2}{2} - 0 &= 7 \\ x^2 &= 14 \\ x &= \pm\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \{-\sqrt{14}; \sqrt{14}\}}}$$

Beispiel 12 (24d). Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung 23
$\int_0^x (2+y) \text{ dy} = 6 \cdot \int_1^e \frac{\text{dz}}{z}$ in $\mathbb{R}$! bis 25a

$$\begin{aligned} \left[2y + \frac{y^2}{2}\right]_0^x &= 6 \cdot [\ln|z|]_1^e \\ 2x + \frac{x^2}{2} - 0 &= 6 \cdot [\underbrace{\ln|e|}_{1} - \underbrace{\ln|1|}_{0}] \\ \frac{x^2}{2} + 2x &= 6 \qquad | \cdot 2 \\ x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ x_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{4+12} \\ \underline{x_1 = 2} &\qquad \underline{x_2 = -6} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \{-6; 2\}}}$$

Beispiel 13 (23c). Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\int_x^2 \left(y^2 - 2y + 3\right)\ \mathrm{dy} = \frac{7}{3}$ in $\mathbb{R}$!

$$\int\limits_x^2 \left(y^2 - 2y + 3\right)\ \mathrm{dy} = \frac{7}{3}$$
$$\left[\frac{y^3}{3} - y^2 + 3y\right]_x^2 = \frac{7}{3}$$
$$\left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) = \frac{7}{3}$$
$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x = \frac{7}{3}$$
$$x^3 - 3x^2 + 9x - 7 = 0$$

erste Lösung erraten: $x_1 = 1$
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - 3x^2 + 9x - 7\right) : (x - 1) = \underline{x^2 - 2x + 7} \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad - 2x^2 + 9x \\
\quad \underline{-2x^2 + 2x} \\
\qquad 7x - 7 \\
\qquad \underline{7x - 7} \\
\qquad\quad 0\text{R.}
\end{array}$$

$$x^2 - 2x + 7 = 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 7} = 1 \pm \sqrt{-6} \notin \mathbb{R}$$

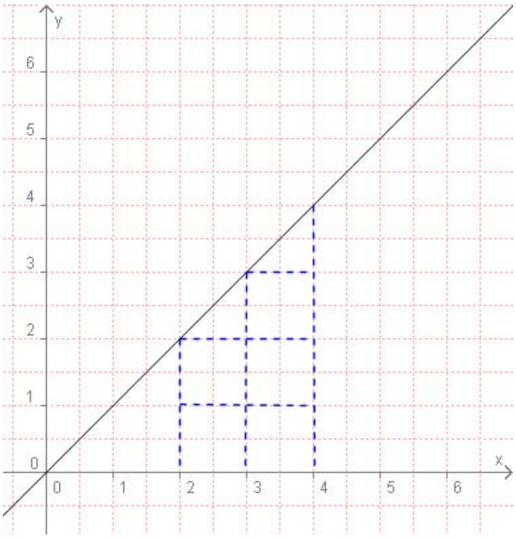
$\Rightarrow$ keine weiteren Lösungen

$$\underline{\underline{L = \{1\}}}$$

5 Flächeninhalt krummlinig begr. Flächen

5.1 Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse

Beispiel 14. Berechne den Flächeninhalt der Fläche zwischen $y = x$ und der x-Achse von $x = 2$ bis $x = 4$:



$f(x) = x$

1. Möglichkeit: Kästchen abzählen

$$\underline{\underline{A = 6\,\text{cm}^2}}$$

2. Möglichkeit: Flächeninhalt Trapez

$$A = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$$
$$A = \frac{(4+2)\cdot 2}{2} = \underline{\underline{6\,\text{cm}^2}}$$

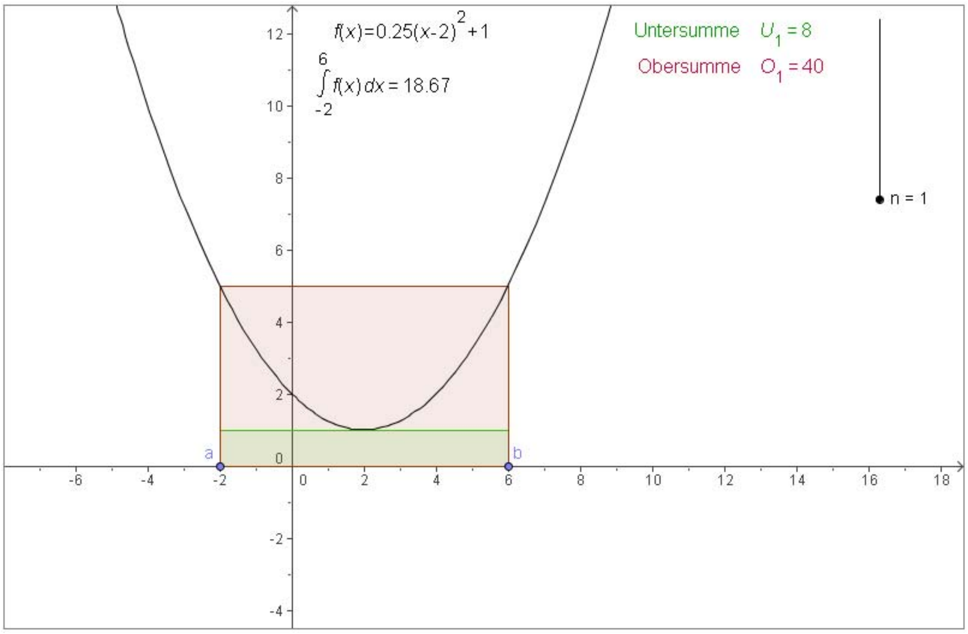
3. Möglichkeit: bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\ \text{dx} = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^4 x\ \text{dx} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = \underline{\underline{6\,\text{cm}^2}}$$

5.2 Unter- und Obersumme

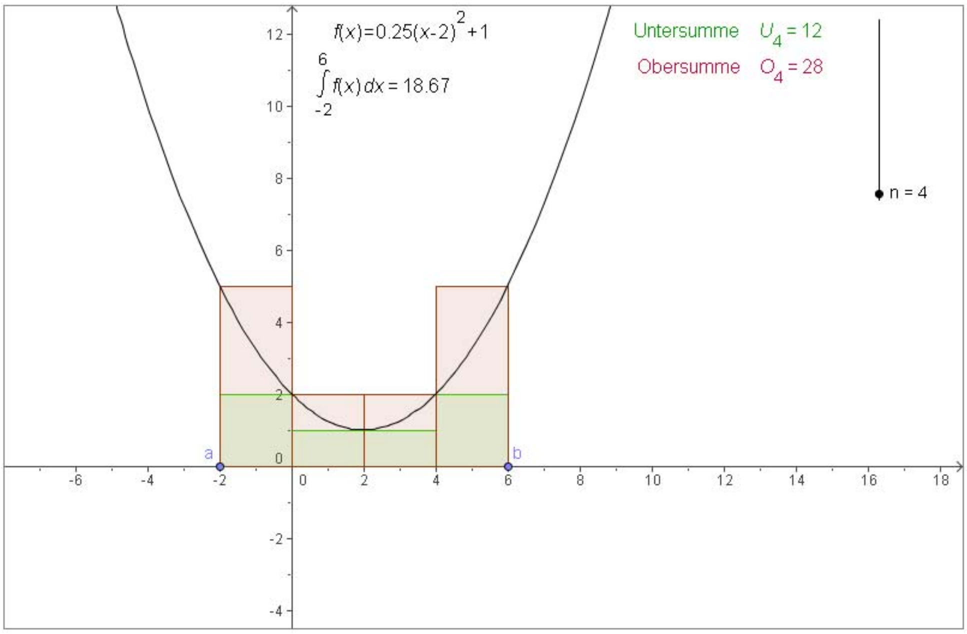
Um den Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x-Achse berechnen zu können, kann ich diesen Flächeninhalt näherungsweise durch Rechtecke berechnen.
Man teilt das Intervall $[a; b]$ in n gleiche Teile der Länge h.
In der folgenden Abbildung habe ich den Flächeninhalt der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$ im Intervall $[-2; 6]$ durch ein Rechteck, das unterhalb der Funktion liegt (grün) und ein Rechteck, das genau so hoch ist wie der größte Funktionswert dieser Funktion im Intervall $[-2; 6]$, angenähert.



Das grüne Rechteck (Untersumme) hat einen Flächeninhalt von $U_1 = 8 \cdot 1 = 8$ und das rote Rechteck (Obersumme) einen Flächeninhalt von $O_1 = 8 \cdot 5 = 40$. Diese beiden Werte liegen noch sehr weit auseinander, doch die tatsächliche Größe des Flächeninhalts zwischen Kurve und x-Achse liegt mit Sicherheit dazwischen.

$$U_n \leq A_a^b \leq O_n$$

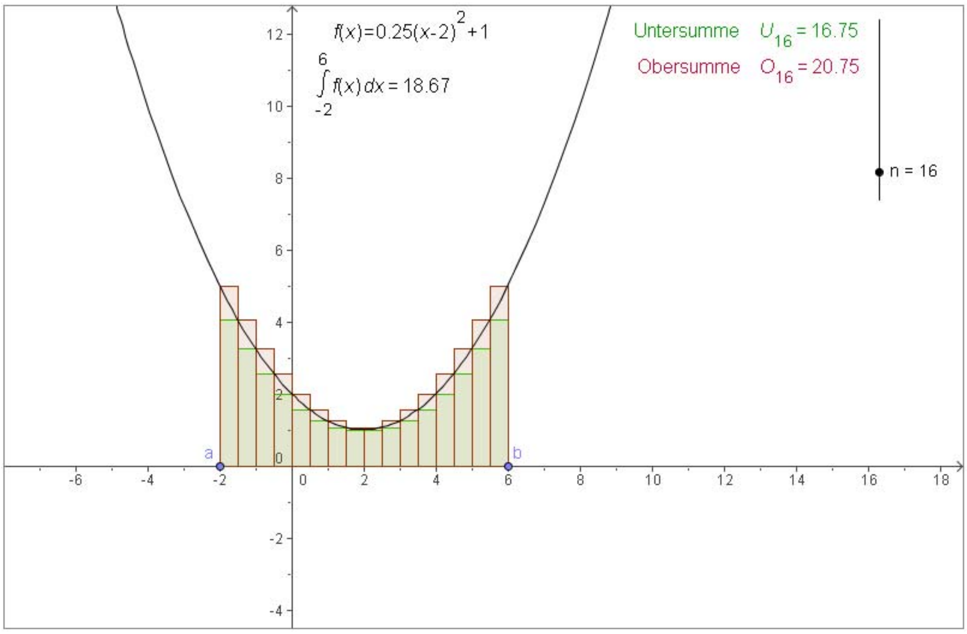
Wir teilen das Intervall in 4 gleich lange Teile:



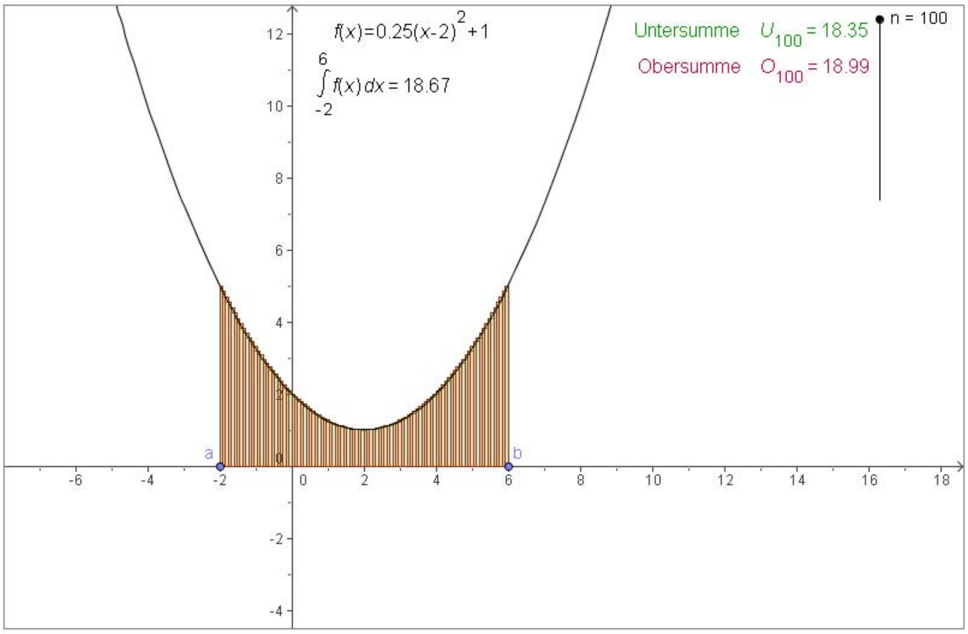
Die Breite eines solchen Rechtecks ist nun $h = \frac{b-a}{n} = \frac{6+2}{4} = 2$. Die Höhen bei der Unternumme jeweils der niedrigste Funktionswert im Intervall und bei der Obersumme jeweils der höchste Funktionswert im Intervall:

$$\begin{aligned}
U_4 &= h \cdot f(a+h) + h \cdot f(a+2h) + h \cdot f(a+2h) + h \cdot f(a+3h) = \\
&= 2 \cdot f(0) + 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(4) = \\
&= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = \\
&= 4 + 2 + 2 + 4 = \underline{12} \\
O_4 &= h \cdot f(a) + h \cdot f(a+h) + h \cdot f(a+3h) + h \cdot f(a+4h) = \\
&= 2 \cdot f(-2) + 2 \cdot f(0) + 2 \cdot f(4) + 2 \cdot f(6) = \\
&= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = \\
&= 10 + 4 + 4 + 10 = \underline{28}
\end{aligned}$$

Dementsprechend kann man das Intervall $[a; b]$ in immer mehr Rechtecke einteilen und man wird immer enger beisammen liegende Werte für die Ober- und Untersumme erhalten.



Je kleiner h (also umso mehr Intervalle n), desto geringer wird der Fehler zwischen O_n, U_n und dem tatsächlichen Flächeninhalt.



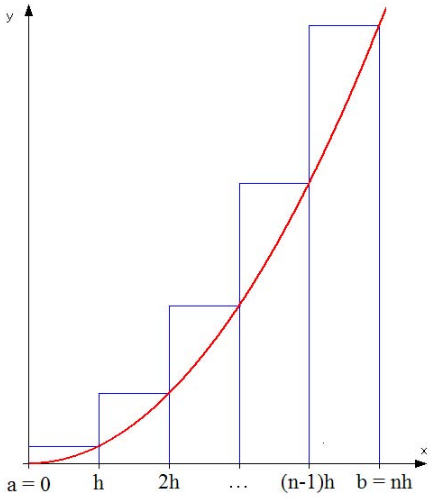
Geht also die Anzahl der Rechtecke gegen Unendlich, so gehen die Ober- sowie auch die Untersumme gegen den Flächeninhalt:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = A = \lim_{n\to\infty} O_n$$

Beispiel 15. Berechne den Flächeninhalt zwischen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall $[0; b]$.[2]

(1) Zerlege das Intervall $[0; b]$ in n gleiche Teilintervalle der Länge $h = \frac{b}{n}$.

(2) (a) Die Obersumme ist die Summe der zu großen Rechtecke:

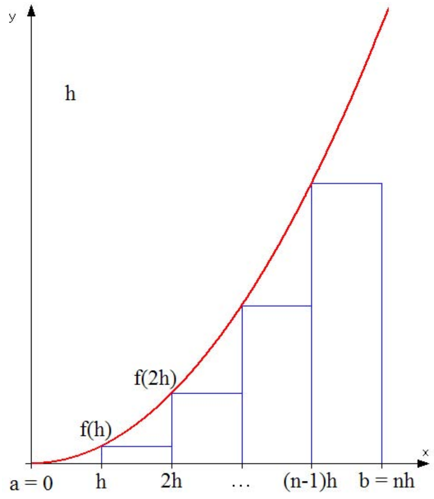


Näherungsweises Berechnen der Fläche aller Rechtecksstreifen aus (1) mittels Rechtecksflächen, die oberhalb der Funktion liegen. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks wird berechnet durch Teilintervalllänge h mal größtem Funktionswert im betrachteten Intervall:

$$\begin{aligned}
O_n &= f(h) \cdot h + f(2h) \cdot h + f(3h) \cdot h + \cdots + f(n \cdot h) \cdot h = \\
&= h^3 + 4h^3 + 9h^3 + \cdots + n^2 h^3 = \\
&= h^3 \cdot \left(1 + 4 + 9 + \cdots + n^2\right) = \\
&= h^3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\
&= h^3 \cdot \frac{2n^3 + n^2 - 2n^2 - n}{6} = \\
&= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \frac{2n^3 - n^2 - n}{6} = \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^3 - n^2 - n}{n^3}
\end{aligned}$$

[2]Anm.: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) Die Untersumme ist die Summe der zu kleinen Rechtecke:



Näherungsweises Berechnen der Fläche aller Rechtecksstreifen aus (1) mittels Rechtecksflächen, die unterhalb der Funktion liegen. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks wird berechnet durch Teilintervalllänge h mal kleinstem Funktionswert im betrachteten Intervall:

$$\begin{aligned}
U_n &= f(0)\cdot h + f(h)\cdot h + f(2h)\cdot h + \cdots + f((n-1)h)\cdot h = \\
&= 0 + h^2\cdot h + 4h^2\cdot h + \cdots + (n-1)^2\cdot h^2\cdot h = \\
&= h^3\cdot\big(1+4+\cdots+(n-1)^2\big) = \\
&= h^3\cdot\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \\
&= h^3\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \\
&= h^3\cdot\frac{2n^3-n^2-2n^2-n}{6} = \\
&= \left(\frac{b}{n}\right)^3\cdot\frac{2n^3-3n^2-n}{6} = \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2-n}{n^3}
\end{aligned}$$

(3) Durch eine Verfeinerung der Intervalleinteilung (d.h. durch eine Vergrößerung der Anzahl n der Teilintervalle) ergibt U_n bzw. O_n einen verbesserten Näherungswert für die gesuchte Fläche.

(a) Es strebt O_n mit $n \to \infty$ gegen die gesuchte Fläche. Für $n \to \infty$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^3 - n^2 - n}{n^3} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{n^2}{n^3} - \frac{n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1} = \\ &= \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \underline{\frac{b^3}{3}}\end{aligned}$$

(b) Es strebt U_n mit $n \to \infty$ gegen die gesuchte Fläche. Für $n \to \infty$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 - n}{n^3} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1} = \\ &= \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \underline{\frac{b^3}{3}}\end{aligned}$$

(4) Wenn der Fall eintritt, dass $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$, dann wird der gemeinsame Grenzwert als Fläche gedeutet:

$$A_0^b = \frac{1}{3} b^3$$

(5) Mittels Hauptsatz der Integralrechnung ergbt sich:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^b x^2\,\mathrm{dx} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^b = \frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{b^3}{3}$$

(6) Die Ergebnisse aus (4) und (5) stimmen überein, d.h. Flächenberechnungen können unter bestimmten Voraussetzungen mittels Integralrechnung erfolgen.

Beispiel 16. Berechne den Flächeninhalt zwischen der Funktion $f(x) = x^3$ und der x-Achse im Intervall $[0; b]$.[3] HÜ

(1) Zerlegen des Intervalls $[0; b]$ in n gleiche Teilintervalle der Länge $h = \frac{b}{n}$.

(2) (a) Näherungsweises Berechnen der Fläche aller Rechtecksstreifen aus (1) mittels Rechtecksflächen, die unterhalb der Funktion liegen (Untersumme U_n).
Flächeninhalt eines solchen Rechtecks: Teilintervalllänge h mal kleinstem Funktionswert im betrachteten Intervall.

$$\begin{aligned}
U_n &= f(0)\cdot h + f(h)\cdot h + f(2h)\cdot h + \cdots + f((n-1)h)\cdot h = \\
&= 0 + h^3\cdot h + 8h^3\cdot h + \cdots + (n-1)^3\cdot h^3\cdot h = \\
&= h^4\cdot\big(0+1+8+27+\cdots+(n-1)^3\big) = \\
&= h^4\cdot\left[\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right] = \\
&= \frac{b^4}{n^4}\cdot\left[\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right] = \\
&= \frac{b^4}{4}\cdot\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^4 + \frac{2(n-1)^3}{n^4} + \frac{(n-1)^2}{n^4}\right]
\end{aligned}$$

(b) Näherungsweises Berechnen der Fläche aller Rechtecksstreifen aus (1) mittels Rechtecksflächen, die oberhalb der Funktion liegen (Obersumme O_n).
Flächeninhalt eines solchen Rechtecks: Teilintervalllänge h mal größtem Funktionswert im betrachteten Intervall.

$$\begin{aligned}
O_n &= f(h)\cdot h + f(2h)\cdot h + f(3h)\cdot h + \cdots + f(n\cdot h)\cdot h = \\
&= h^4 + 8h^4 + 27h^4 + \cdots + n^3h^4 = \\
&= h^4\cdot\big[1+8+27+\cdots+n^3\big] = \\
&= h^4\cdot\left[\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right] = \\
&= \frac{b^4}{n^4}\cdot\left[\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right] = \\
&= \frac{b^4}{4} + \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2} = \\
&= \frac{b^4}{4}\cdot\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

[3] Anm.: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

(3) Durch eine Verfeinerung der Intervalleinteilung (d.h. durch eine Vergrößerung der Anzahl n der Teilintervalle) ergibt U_n bzw. O_n einen verbesserten Näherungswert für die gesuchte Fläche.

(a) Anschaulich strebt U_n mit $n \to \infty$ gegen die gesuchte Fläche.
Für $n \to \infty$ ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4} \cdot \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^4 + \frac{2(n-1)^3}{n^4} + \frac{(n-1)^2}{n^4} \right] =$$
$$= \frac{b^4}{4} \cdot [1+0+0] = \frac{b^4}{4}$$

(b) Anschaulich strebt O_n mit $n \to \infty$ gegen die gesuchte Fläche. Für $n \to \infty$ ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4} \cdot (1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}) = \frac{b^4}{4} \cdot (1+0+0) = \frac{b^4}{4}$$

(4) Wenn der Fall eintritt, dass $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$, dann wird der gemeinsame Grenzwert als Fläche gedeutet:

$$A_0^b = \frac{b^4}{4}$$

(5) Mittels Hauptsatz der Integralrechnung ergbt sich:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^b x^3\,\mathrm{dx} = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^b = \frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{b^4}{4}$$

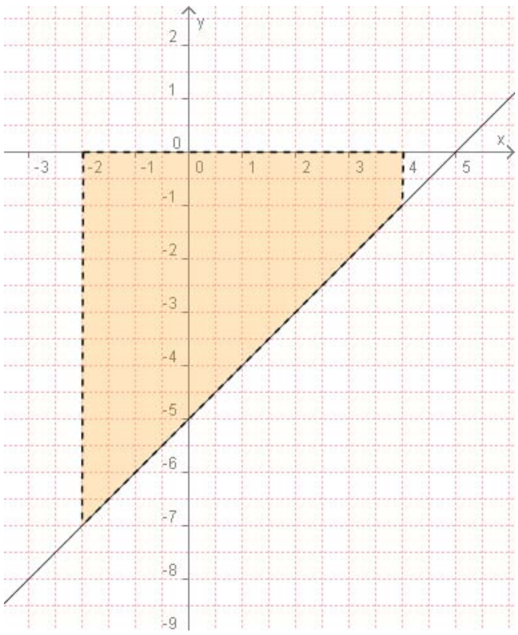
(6) Die Ergebnisse aus (4) und (5) stimmen überein, d.h. Flächenberechnungen können unter bestimmten Voraussetzungen mittels Integralrechnung erfolgen.

5.3 Negativer Flächeninhalt

Beispiel 17.

$$\int_{-2}^{4} \frac{x^2 - 5x}{x} \, \mathrm{dx} = \int_{-2}^{4} x - 5 \, \mathrm{dx} =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - 5x\right)\Big|_{-2}^{4} =$$
$$= \left(\frac{16}{2} - 20\right) - \left(\frac{4}{2} + 10\right) = -24$$

Was bedeutet ein negativer Flächeninhalt?
Skizze: $f(x) = \frac{x^2-5x}{x} = x - 5$ für $x \neq 0 \Longrightarrow$ Lücke bei $x = 0$



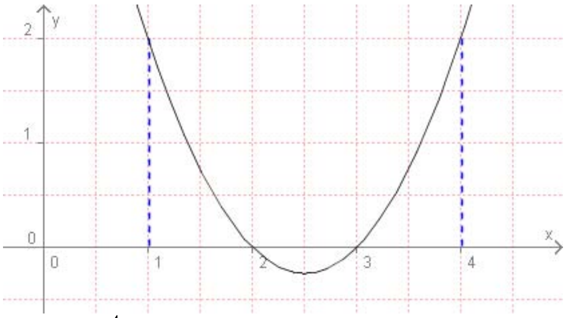
Negativer Flächeninhalt bedeutet, dass die Fläche unter der x-Achse liegt!

5.4 Flächeninhalt von Fkt., die teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse liegen

Durchsetzt der Graph von $f(x)$ im vorgegebenen Intervall die x-Achse, so wird das ursprüngliche Integrationsintervall durch die Nullstellen von $f(x)$ in Teilintervalle aufgespaltet. Das Ermitteln möglicher Nullstellen von $f(x)$ im vorgegebenen Intervall ist daher stets vor der Flächenberechnung durchzuführen!

Beispiel 18. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Ermittle den Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[1; 4]$

Skizze:



Nullstellen:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

$A = \int_1^4 \left(x^2 - 5x + 6\right)\ \mathrm{dx} = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = \int_1^2 \left(x^2 - 5x + 6\right)\ \mathrm{dx} = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Big|_1^2 =$$
$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6\right) = \underline{\frac{5}{6}}$$

Für den mittleren Flächeninhalt (A_2) gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wir subtrahieren den Flächeninhalt (da er negativ ist!), oder wir vertauschen die Grenzen!

$$A_2 = \int_3^2 \left(x^2 - 5x + 6\right)\ \mathrm{dx} = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Big|_3^2 =$$
$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 18\right) = \underline{\frac{1}{6}}$$

$$A_3 = \int_3^4 \left(x^2 - 5x + 6\right)\ \mathrm{dx} = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Big|_3^4 =$$
$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{80}{2} + 24\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 18\right) = \underline{\frac{5}{6}}$$

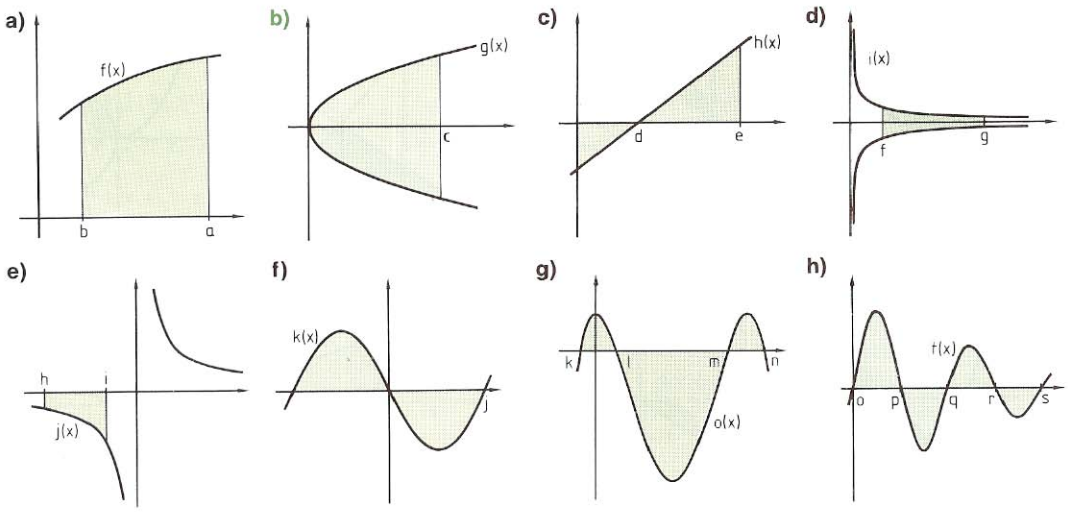
$A = \int_1^4 \left(x^2 - 5x + 6\right)$ dx $= A_1 + A_2 + A_3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \underline{\underline{\frac{11}{6}\,\mathrm{E}^2}}$ 11 bis 16a

Wichtig! Wiederhole das „Aussehen“ verschiedener Funktionen!

$$f(x) = x^2$$
$$f(x) = x^2 - 3$$
$$f(x) = (x+2)^2$$
$$f(x) = -2x^2$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Als Hilfe dienen folgende Übersichten:
`http://mone.denninger.at/cimu/uz/Klasse8/funktionen.pdf`
`http://mone.denninger.at/cimu/uz/Klasse5/FunktionenvomTyp.pdf`

Beispiel 19 (26cdh). Der grün unterlegte Flächeninhalt A ist als bestimmtes Integral so anzugeben, dass eine numerische Auswertung ein positives Integral liefert: 26 Rest 27 bis 32a



(a) $A = \int_b^a f(x)$ dx

(b) $A = 2 \cdot \int_0^c g(x)$ dx

(c) $A = \int_d^0 h(x)$ dx $+ \int_d^e h(x)$ dx

(d) $A = 2 \cdot \int_f^g i(x)$ dx

(e) $A = \int_i^h j(x)$ dx

(f) $A = 2 \cdot \int_j^0 k(x)$ dx

(g) $A = 4 \cdot \int_0^l o(x)$ dx $+ \int_m^l o(x)$ dx

(h) $A = \int_0^p t(x)$ dx $+ \int_q^p t(x)$ dx $+ \int_q^r t(x)$ dx $+ \int_s^r t(x)$ dx

Beispiel 20 (30b). Berechne die Fläche A zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 2$, der x-Achse und den Ordinaten in den Punkten $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

1. Nullstellen berechnen:

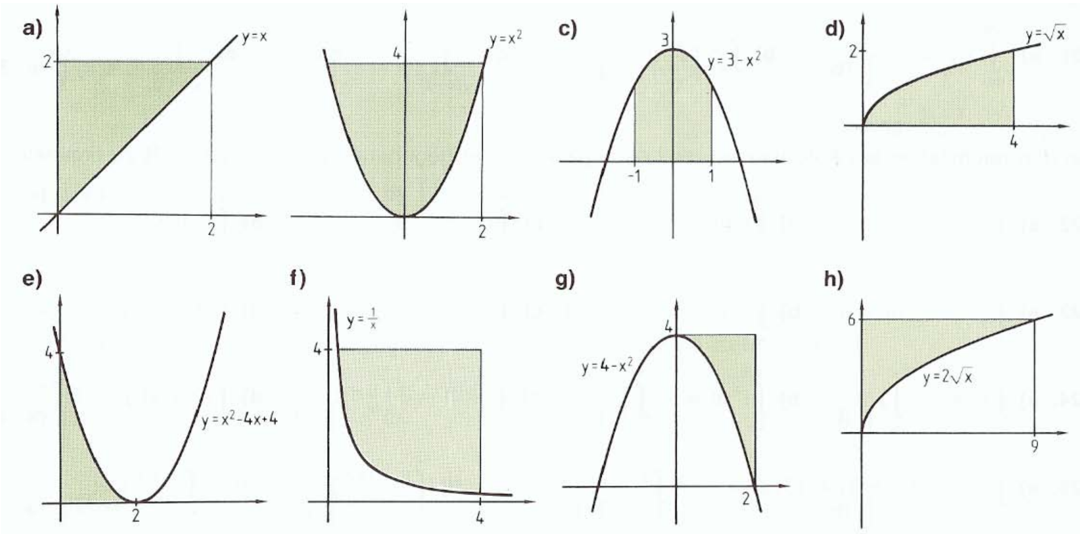
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$\underline{x_1 = 1} \qquad \underline{x_2 = 2}$$

2. Flächenberechnung:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{dx} + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{dx} = \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 2\right)\,\mathrm{dx} - \int_1^2 \left(x^2 - 3x + 2\right)\,\mathrm{dx} + \\
&+ \int_2^3 \left(x^2 - 3x + 2\right)\,\mathrm{dx} = \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^1 + \\
&+ \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = \\
&= \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right] + \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2} + 6\right)\right] + \\
&+ \left[\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2} + 6\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4\right)\right] = \\
&= \left[\frac{5}{6}\right] + \left[\left(\frac{5}{6}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)\right] = \\
&= \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \underline{\underline{1\,\mathrm{E}^2}}
\end{aligned}$$

6 Flächeninhalt oberhalb der Kurve

Beispiel 21 (33). Die grün unterlegte Fläche ist rechnerisch zu ermitteln. 33a bis 33d



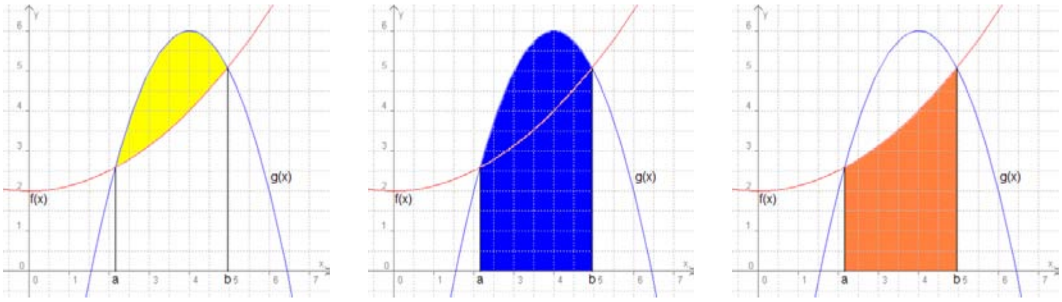
(f) Wir berechnen zuerst das gesamte Rechteck und subtrahieren anschließend die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse:

$$
\begin{aligned}
A &= 4\cdot(4-\frac{1}{4}) - \int_{\frac{1}{4}}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \\
&= 15 - [\ln|x|]_{\frac{1}{4}}^{4} = \\
&= 15 - \left[\ln 4 - \ln\frac{1}{4}\right] = \\
&= 15 - \ln 16 \approx \\
&\approx \underline{\underline{12.23\,\mathrm{E}^2}}
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
A &= 2\cdot 4 - \int_{0}^{2} 4 - x^2\,\mathrm{dx} = \\
&= 8 - \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \\
&= 8 - \left[(8-\frac{8}{3}) - 0\right] = \\
&= \underline{\underline{\frac{8}{3}\,\mathrm{E}^2}}
\end{aligned}
$$

7 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

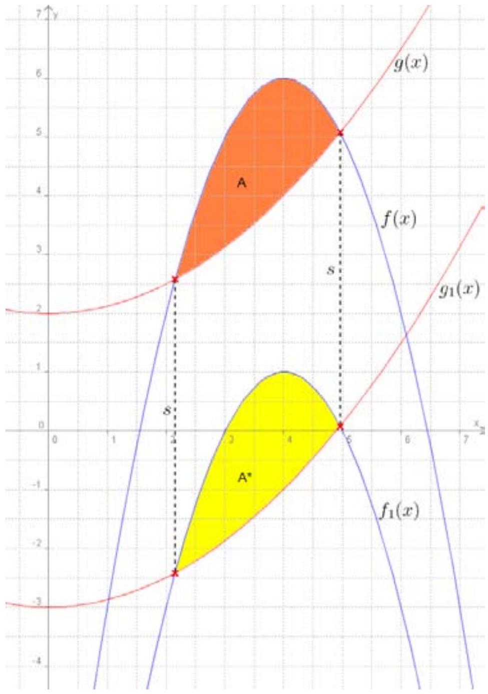


Um den Flächeninhalt zwischen zwei Kurven zu berechnen, berechnet man zuerst den Flächeninhalt wzischen der „oberen“ Kurve und der x-Achse und diesen anschließend minus dem Flächeninhalt zwischen der „unteren“ Kurve und der x-Achse.

$$A = A_g - A_f = \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx} - \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ \mathrm{dx}$$

a und b sind dabei die Schnittpunkte der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

Liegt die zu berechnende Fläche A^* nicht zur Gänze oberhalb der x-Achse, d.h. $f(x)$ und $g(x)$ haben in $[a; b]$ sowohl positive, als auch negative Funktionswerte, so kann A durch eine Schiebung parallel zur y-Achse in eine Lage nur überhalb der x-Achse gebracht werden:



Wegen

$$f_1(x) = f(x) - s$$
$$g_1(x) = g(x) - s$$

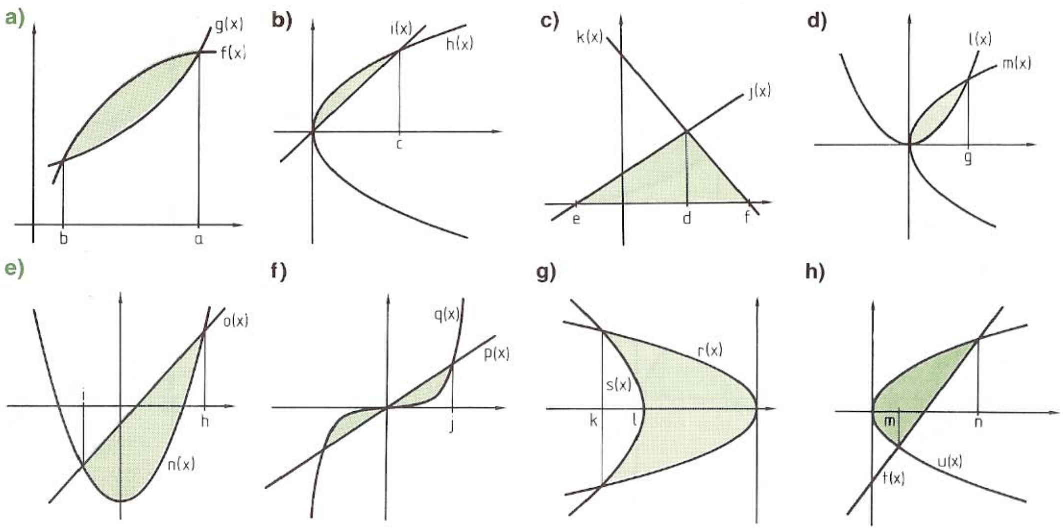
($s \in \mathbb{R}$) und

$$\begin{aligned} &f_1(x) - g_1(x) = \\ =&[f(x) - s] - [g(x) - s] = \\ =&f(x) - s - g(x) + s = \\ =&f(x) - g(x) \end{aligned}$$

ergibt sich die gesuchte Fläche aus

$$A^* = A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

Beispiel 22 (34). Die grün unterlegte Fläche ist als bestimmtes Integral so anzugeben, dass eine numerische Auswertung ein positives Resultat liefert:



(a) …

Beispiel 23. Berechne den Inhalt der endlichen Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ und $g(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$ eingeschlossen wird.

(1) Integrationsgrenzen (=Schnittpunkt der Graphen)

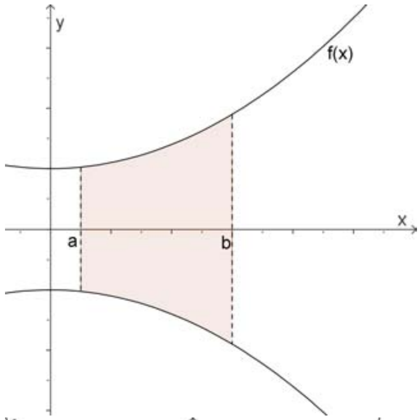
$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
f(x) - g(x) &= 0 \\
-\frac{1}{2}x + 5 - \frac{1}{8}x^2 - 1 &= 0 \\
-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 4 &= 0 \qquad | \cdot (-8) \\
x^2 + 4x - 32 &= 0 \\
(x-4)(x+8) &= 0 \\
x_1 = 4 \qquad x_2 &= -8
\end{aligned}$$

$[a; b] = [-8; 4]$

(2) Flächenberechnung

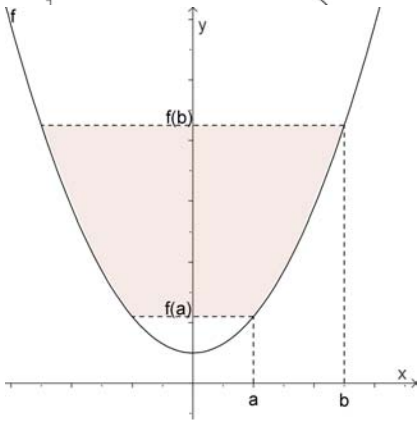
$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b (f(x) - g(x)) \text{ dx} = \\
&= \int_{-8}^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right) \text{ dx} = \\
&= \left[-\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 4x\right]_{-8}^4 = \\
&= \left[-\frac{64}{24} - 4 + 16\right] - \left[\frac{512}{24} - 16 - 32\right] = \\
&= \left[\frac{28}{3}\right] - \left[-\frac{80}{3}\right] = \\
&= \underline{\underline{36\,\text{E}^2}}
\end{aligned}$$

8 Volumsberechnungen



Rotation um die x-Achse:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \text{ dx}$$



Rotation um die y-Achse:

$$V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 \text{ dy}$$

Beispiel 24 (94h). Welches Volumen V entsteht, wenn die von $f(x) = 2x^2 + 1$ und $g(x) = 7x - 2$ eingeschlossene endliche Fläche um die y-Achse rotiert?
Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x)$$
$$2x^2 + 1 = 7x - 2$$
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 3$$

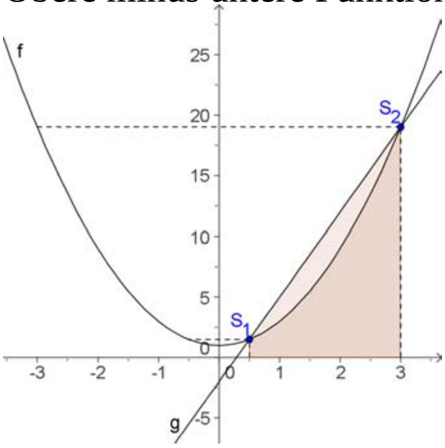
$$\underline{S_1(\tfrac{1}{2}|\tfrac{3}{2})} \qquad \underline{S_2(3|19)}$$

$f(x)$ und $g(x)$ jeweils nach x^2 umformen:

$$f(x) = 2x^2 + 1$$
$$y - 1 = 2x^2$$
$$x^2 = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 7x - 2$$
$$y + 2 = 7x$$
$$x = \frac{y}{7} + \frac{2}{7}$$
$$x^2 = \left(\frac{y}{7} + \frac{2}{7}\right)^2$$
$$x^2 = \frac{y^2}{49} + \frac{4}{49}y + \frac{4}{49}$$
$$x^2 = \frac{1}{49} \cdot \left(y^2 + 4y + 4\right)$$

Obere minus untere Funktion:



$$x_f^2 - x_g^2 =$$
$$= \frac{y}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{49} \cdot \left(y^2 + 4y + 4\right) =$$
$$= -\frac{y^2}{49} + \frac{41}{98}y - \frac{57}{98}$$

Volumen:

$$\begin{aligned}
V_y &= \pi \cdot \int_{\frac{3}{2}}^{19} x^2 \,\mathrm{dy} = \\
&= \pi \cdot \int_{\frac{3}{2}}^{19} \left(-\frac{y^2}{49} + \frac{41}{98}y - \frac{57}{98}\right) \mathrm{dy} = \\
&= \pi \cdot \left[-\frac{y^3}{147} + \frac{41}{196}y^2 - \frac{57}{98}y\right]_{\frac{3}{2}}^{19} = \\
&= \pi \cdot \left[\frac{10469}{588} + \frac{333}{784}\right] = \\
&= \underline{\underline{\frac{875}{48}\pi \,\mathrm{E}^3}}
\end{aligned}$$