1 Komplexe Zahlen

1.1 Übersicht

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0	
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0	$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
$\mathbb{R} = \{x \| x$ liegt auf der Zahlengeraden $\}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Menge der irrationalen Zahlen	
$\mathbb{C} = \{z \| z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$	Menge der komplexen Zahlen	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Somit ergibt sich: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.2 Wichtige Begriffe

Imaginäre Einheit i, festgelegt durch $i^2 = -1$.

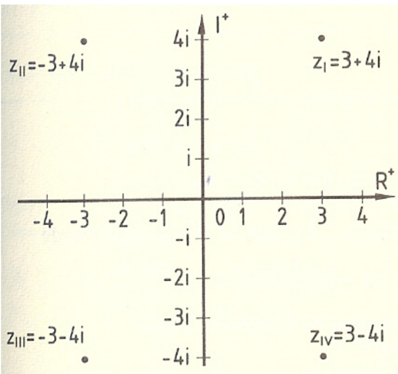
Imaginäre Zahl bi mit $b \in \mathbb{R}$; Beispiele $3i$, $-\frac{1}{2}i$, $\sqrt{3}i$

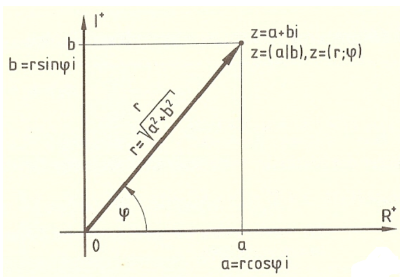
Komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
Man nennt a … Realteil von z, b … Imaginärteil von z

Konjugiert komplexe Zahlen $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils.

1.3 Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Führt man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem ein, so ist umkehrbar eindeutig jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ der Punkt der Ebene mit den Koordinaten $(a|b)$ zugeordnet (Gaußsche Zahlenebene); die x-Achse wird reelle Achse, die y-Achse imaginäre Achse genannt.





φ … Argument oder Polarwinkel von z ($\varphi = \arg z$)
r … Betrag von z ($r = |z|$)
$(r; \varphi)$ … Polarkoordinaten der komplexen Zahl z

1.4 Zusammenhänge zwischen den Größen r, φ und a, b

Berechnen von r, φ aus a, b	Berechnen von a, b aus r, φ
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\tan\varphi = \frac{b}{a}$	$a = r \cdot \cos\varphi$ $b = r \cdot \sin\varphi$

2 Gleichungen

2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Definition 1. Unter der Normalform einer linearen Gleichung mit einer Variablen versteht man eine Gleichung der Gestalt $ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Lösung: $x = -\frac{b}{a}$

2.2 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Definition 2. Unter der Normalform einer linearen Gleichung mit zwei Variablen versteht man eine Gleichung der Gestalt $ax + by = c$ mit $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$.
$ax + by = 0$ ... homogene linaere Gleichung
$ax + by = c$ ... inhomogene lineare Gleichung ($c \neq 0$)

2.3 Wurzelgleichungen

Definition 3. Eine Gleichung, bei der die Variable unter dem Wurzelzeichen vorkommt, heißt Wurzelgleichung.

Das Lösen von Wurzelgleichungen erfolgt in drei Schritten:

(1) Bestimmung der Definitionsmenge D aus der Bedingung, dass die Radikanden größer oder gleich Null sein müssen.

(2) Rechnerische Lösung durch einmaliges oder mehrmaiges Quadrieren.

(3) Für jede erhaltene Lösung muss die Probe gemacht werden, da das Quadrieren nicht immer eine Äquivalenzumformung darstellt. Dabei ist zu beachten, dass unter dem Symbol $\sqrt{\ }$ nur der positive Wert verstanden wird.

Beispiel 4. Löse in $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+5} = x - 1$

(1) Definitionsmenge: Radikand

$$x + 5 \geq 0$$
$$x \geq -5 \qquad D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -5\}$$

(2) Rechnerische Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} &= x - 1 && |\text{Quadrieren} \\ x + 5 &= (x-1)^2 \\ x + 5 &= x^2 - 2x + 1 && |\text{Reduzieren} \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 && |\text{Lösen der quadratischen Gleichung} \\ x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_1 &= 4 \in D, x_2 = -1 \in D \end{aligned}$$

(3) Proben: Probe für $x_1 = 4$: Probe für $x_2 = -1$:

$$T_L(4) = \sqrt{4+5} = 3 \qquad T_L(-1) = \sqrt{-1+5} = 2$$
$$T_R(4) = 4 - 1 = 3 \qquad T_R(-1) = -1 - 1 = -2$$
$$T_L = T_R \qquad T_L \neq T_R$$

$\Longrightarrow L = \{4\}$

Beispiel 5. Löse in $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+12} = \sqrt{4x+33}$

2.4 Exponentialgleichungen

Definition 6. Eine Gleichung, bei der die Variable im Exponenten einer Potenz vorkommt, heißt Expoentialgleichung. Die Definitionsmenge dieser Gleichung ist $D = \mathbb{R}$.

Siehe SÜ-Heft 6.Klasse – 76.-78. Schulübung

2.5 Logarithmische Gleichungen

Definition 7. Eine Gleichung, bei der die Variale im Numerus von Logarithmen vorkommt, heißt logarithmische Gleichung. Die Definitionsmenge D ergibt sich aus der Bedingung, dass der Numerus größer als Null sein muss.

Siehe SÜ-Heft 6.Klasse – ab 78. Schulübung

2.6 Quadratische Gleichungen

Definition 8. Allgemeine quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \in \mathbb{R}\backslash 0$; $b, c \in \mathbb{R}$. Unter der Normalform einer quadratischen Gleichung versteht man eine Gleichung der Gestalt $x^2 + px + q = 0$.

Lösungsformeln:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{bzw.} x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wo kommen diese Formeln her?

Herleitung der PQ-Formel

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 \qquad && | - q \\
x^2 + px &= -q && \text{Ergänzen auf ein vollst. Quadrat} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= -q && | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && | \sqrt{} \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && | - \frac{p}{2} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}$$

Leite die große Lösungsformel her!

Der unter der Wurzel stehende Ausdruck heißt Diskriminante D:

$D > 0$**:** zwei unterschiedliche Lösungen

$D = 0$**:** eine reelle Doppellösung

$D < 0$**:** zwei konjugiert komplexe Lösungen (keine Lösung in $\mathbb{R}$)

Die Bedingung für Lösungen mit zwei verschiedenen Vorzeichen lautet

$$|b| < \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Satzgruppe von VIETA

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = -p \\
&x_1 \cdot x_2 = q \\
&(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q = 0
\end{aligned}$$

Beispiel 9. Löse $x^2 - 6x + 34 = 0$. Überprüfe anhand der Lösung die Sätze von VIETA!

$$x^2 - 6x + 34 = 0$$
$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-34} = 3 \pm 5i$$
$$x_1 = 3 + 5i \qquad x_2 = 3 - 5i$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 + 5i + 3 - 5i = 6 = -p \\ x_1 \cdot x_2 &= (3+5i)(3-5i) = 9 - 25i^2 = 9 + 25 = 34 = q \\ (x - x_1)(x - x_2) &= (x - 3 - 5i)(x - 3 + 5i) = \\ &= x^2 - 3x - 5ix - 3x + 9 + 15i + 5ix - 15i - 25i^2 = \\ &= x^2 - 6x + 34 \end{aligned}$$

2.7 Gleichungen höheren Grades

2.7.1 Biquadratische Gleichung

Definition 10. Unter einer biquadratischen Gleichung versteht man eine Gleichung der Gestalt $ax^4 + bx^2 + c = 0$; $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b, c \in \mathbb{R}$.

Setzt man für $x^2 = u$, so erhält man eine quadratische Gleichung mit der Variablen u: $au^2 + bu + c = 0$. Diese wird gelöst. Durch Einsetzen in die Substitutionsgleichung $x^2 = u$ erhält man die Lösungen der gegebenen Gleichung.

2.7.2 Gleichung n-ten Grades

Definition 11. Unter einer Gleichung n-ten Grades versteht man eine Gleichung der Form: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz 12. Die rationalen Lösungen der Gleichung n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ sind von der Form $\frac{p}{q}$, wobei p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n ist.

Dieser Satz ist wichtig, wenn man Lösungen durch Probieren finden will.

Beispiel 13. Ermittle die rationalen Lösungen der Gleichung $2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = 0$.