1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(x^2 + 4)$. Diskutiere die Funktion und zeichne sie. In welchem Punkt ist die Tangente parallel zur Geraden $2y - x = 0$? Die Fläche zwischen x-, y-Achse, Kurve und Ordinate im Wendepunkt rotiert um die y-Achse. Berechne das Rotationsvolumen. [P$(2|\ln 8)$, $V = 22.275$]

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Diskutiere die Funktion und zeichne sie. Berechne die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und $x = e$. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Rotationsvolumen? [$A = 2$, $V = 5.52$]

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(\ln x - 1)$. Diskutiere und zeichne die Funktion. Berechne die Fläche zwischen Kurve und x-Achse. [$A = 0.25e^2$]

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \ln x$. Diskutiere und zeichne die Funktion. Berechne die Fläche zwischen y-Achse, Kurve und der Tangente in P$(1|y)$. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen? [$A = 0.25$, $V = \frac{7\pi}{27}$]

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3\ln x}{x}$. Diskutiere und zeichne die Funktion. Berechne die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und $x = \frac{1}{e}$. Die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und $x = e$ rotiert um die x-Achse. Berechne das Rotationsvolumen. [$A = \frac{3}{2}$, $V = 4.54$]

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln^2 x + \ln x - 2$. Bestimme D, N, E, W der Funktion und stelle sie graphisch dar. Berechne die Fläche, die von der Kurve und der Geraden $y = -2$ eingeschlossen wird. [$A = 0.1$]

7. Diskutiere die Funktion $f(x) = x + \ln x$ (Nullstellen näherungsweise!). Berechne die Fläche zwischen der Kurve und den Geraden $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Bestimme den Schnittpunkt der Tangente in P$(1|y)$ mit den Koordinatenachsen. [$A = 5.2958$, $S_1(0|-1)$, $S_2(0.5|0)$]

8. Von einer Funktion kennt man ihre 1. Ableitung $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$. Der Punkt A$(1|0)$ liegt auf der Funktion. Bestimme die Funktionsgleichung, untersuche sie und zeichne sie. Berechne das von $f(x)$ und $f'(x)$ eingeschlossene Flächenstück. [$A = 0.165$]

9. Diskutiere die Funktion $f(x) = x^2 \cdot \ln \frac{x}{4}$ (Definitionsmenge, Grenzwerte, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Graph). Unter welchem Winkel schneidet die Funktion die Parabel $y = x^2$? Berechne den Flächeninhalt der geschlossenen Flache zwischen der x-Achse und der Funktion! [N$(4|0)$, T$(\frac{4}{\sqrt{e}}|-\frac{8}{e})$, $W(\frac{4}{e\sqrt{e}}|-\frac{24}{e^3})$, $\alpha = 0.8769°$, $A = \frac{64}{9}e^3$E^2]

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(x^2 + 4)$. Diskutiere die Funktion und zeichne sie. In welchem Punkt ist die Tangente parallel zur Geraden $2y - x = 0$? Die Fläche zwischen x-, y-Achse, Kurve und Ordinate im Wendepunkt rotiert um die y-Achse. Berechne das Rotationsvolumen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x^2+4) \\
f'(x) &= \frac{1}{x^2+4} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2+4} \\
f''(x) &= \frac{2 \cdot (x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \\
&= \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2} \\
f'''(x) &= \frac{-4x \cdot (x^2+4)^2 - (8-2x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+4) \cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \\
&= \frac{-4x^3 - 16x - 32x + 8x^3}{(x^2+4)^3} = \\
&= \frac{4x^3 - 48x}{(x^2+4)^3}
\end{aligned}
$$

(1) Definitionsmenge: D=$\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4 &> 0 \\
x^2 &> -4
\end{aligned}
$$

(2) Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\ln(x^2+4) &= 0 \qquad |e^{\cdots} \\
x^2 + 4 &= 1 \\
x^2 &= -3
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ keine reellen Nullstellen!

(3) Extremwerte:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2x &= 0 \\
x &= 0 \\
f''(0) &= \frac{8}{16} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(0|\ln 4)}}
\end{aligned}
$$

(4) Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 8 - 2x^2 &= 0 \\ 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$f'''(2) \neq 0 \qquad \underline{\underline{W_1(2|\ln 8)}}$$

$$f'''(-2) \neq 0 \qquad \underline{\underline{W_2(-2|\ln 8)}}$$

Wendetangente: $y = kx + d$

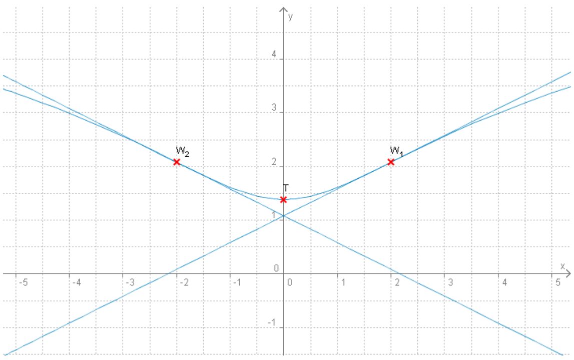
$$k_1 = f'(2) = \frac{4}{8} = \underline{\frac{1}{2}} \qquad \begin{aligned} \ln 8 &= \frac{1}{2} \cdot 2 + d \\ \underline{d} &\underline{= \ln 8 - 1} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{t_1 : y = \frac{1}{2} \cdot x + \ln 8 - 1}}$$

$$k_2 = f'(-2) = \frac{-4}{8} = \underline{-\frac{1}{2}} \qquad \begin{aligned} \ln 8 &= -\frac{1}{2} \cdot (-2) + d \\ \underline{d} &\underline{= \ln 8 - 1} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{t_2 : y = -\frac{1}{2} \cdot x + \ln 8 - 1}}$$

(5) Graph:



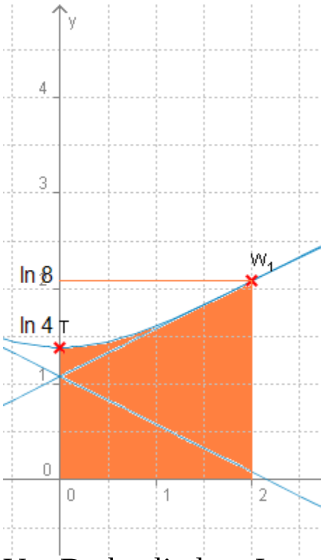
(6) Tangente parallel zu $2y - x = 0$

$$\begin{aligned} 2y &= x \\ y &= \frac{1}{2} \cdot x \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \\
\frac{2x}{x^2+4} &= \frac{1}{2} \\
4x &= x^2+4 \\
x^2-4x+4 &= 0 \\
x_{1,2} &= 2\pm\sqrt{4-4} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{P(2|\ln 8)}}$$

(7) Rotationsvolumen:



$$\begin{aligned}
y &= \ln(x^2+4) \quad |e^{\cdots} \\
e^y &= x^2+4 \\
x^2 &= e^y-4
\end{aligned}$$

V = Drehzylinder - Integral

$$\begin{aligned}
V_1 &= r^2\cdot\pi\cdot h = 2^2\cdot\pi\cdot\ln 8 = \underline{4\pi\ln 8} \\
V_2 &= \pi\cdot\int_{\ln 4}^{ln8} x^2\,\text{dy} = \\
&= \pi\cdot\int_{\ln 4}^{ln8} (e^y-4)\,\text{dy} = \\
&= \pi\cdot[e^y-4y]_{\ln 4}^{\ln 8} = \\
&= \pi\cdot\left[\left(e^{\ln 8}-4\cdot\ln 8\right)-\left(e^{\ln 4}-4\cdot\ln 4\right)\right] = \\
&= \pi\cdot\left[8-4\ln 2^3-4+4\cdot\ln 2^2\right] = \\
&= \pi\cdot[4-12\cdot\ln 2+8\cdot\ln 2] = \\
&= \pi\cdot[4-4\cdot\ln 2] = \\
&\approx \underline{3.86\,\text{E}^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = V_1-V_2 &= 4\pi\ln 8-\pi\cdot(4-4\ln 2) = \\
&= 12\pi\ln 2-4\pi+4\pi\ln 2 = \\
&= 16\pi\ln 2-4\pi \approx \underline{\underline{22.275\,\text{E}^3}}
\end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Diskutiere die Funktion und zeichne sie. Berechne die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und $x = e$. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Rotationsvolumen?

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1+\ln x}{x} \\
f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \\
&= \frac{-1+2\cdot\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 1}{x^3} \\
f'''(x) &= \frac{\frac{2}{x}\cdot x^3 - (2\ln x - 1)\cdot 3x^2}{x^6} = \\
&= \frac{2-6\ln x+3}{x^4} = \frac{5-6\ln x}{x^4}
\end{aligned}
$$

(1) Definitionsmenge: D=$\mathbb{R}^+$

(2) Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\ln x &= -1 \\
x &= \frac{1}{e} \\
&\Rightarrow \underline{\underline{N(\frac{1}{e}|0)}}
\end{aligned}
$$

(3) Extremwerte:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\ln x &= 0 \\
x &= 1 \\
f''(1) = \frac{-1}{1} &= -1 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{H(1|1)}}
\end{aligned}
$$

(4) Wendepunkte:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
-x + 2x\cdot\ln x &= 0 \\
x\cdot(-1+2\ln x) &= 0 \\
x_1 = 0 \notin \mathrm{D} \qquad 2\ln x &= 1 \\
\ln x &= \frac{1}{2} \\
x &= \sqrt{e}
\end{aligned}
$$

$$f'''(\sqrt{e}) = \frac{5\sqrt{e} - 6\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{e}^5} = \frac{\sqrt{e}\cdot(5-3)}{\sqrt{e}^5} = \frac{2}{e^2} \neq 0$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1+\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{W(\sqrt{e}|\frac{3}{2\sqrt{e}})}}$$

Wendetangente: $y = kx + d$

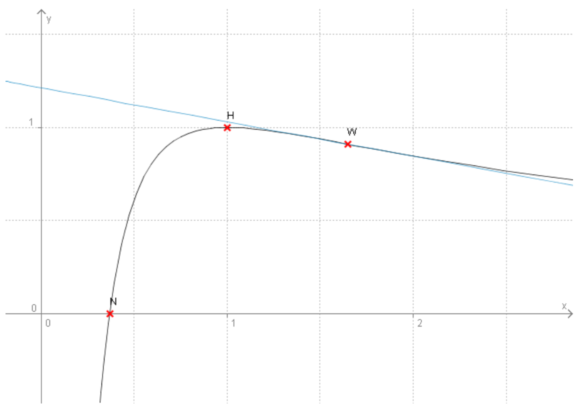
$$k = f'(\sqrt{e}) = -\frac{\frac{1}{2}}{e} = \underline{-\frac{1}{2e}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}\cdot\sqrt{e} + d$$

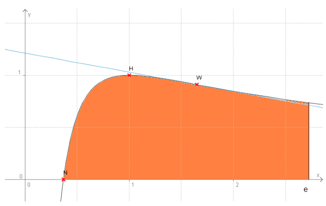
$$d = \frac{3}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{2e} = \frac{3e+e}{2e\sqrt{e}} = \frac{4e}{2e\sqrt{e}} = \underline{\frac{2}{\sqrt{e}}}$$

$$\underline{\underline{t: y = -\frac{1}{2e}\cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}}}}$$

(5) Graph:



(6) Flächeninhalt:



$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{(1+\ln x)}_{g(x)}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + \ln x)^2 \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + 2\ln x + (\ln x)^2\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} =$$
$$= \left[\frac{1}{2} + \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} =$$
$$= \frac{1}{2} + \ln e + \frac{1}{2} \cdot (\ln e)^2 - \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{2} \cdot (\ln \frac{1}{e})^2 =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{2\,\mathrm{E}^2}}$$

(7) Rotationsvolumen:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{dx}$$
$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$
$$f(x)^2 = \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)^2 = \frac{(1 + \ln x)^2}{x^2} = \frac{1 + 2\ln x + \ln^2 x}{x^2} =$$
$$= \underline{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2} \cdot \ln^2 x}$$

Um den Überblick zu behalten: Nebenrechnungen! (Die Integrationskonstante C wurde bei der Nebenrechnung weggelassen.)

$$\int f(x)^2 \,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{dx} + \int \frac{2}{x^2} \cdot \ln x \,\mathrm{dx} + \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln^2 x \,\mathrm{dx}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{2}{x^2} \cdot \ln x \,\mathrm{dx} = 2 \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \,\mathrm{dx} = \text{ Pratielle Integration}$$
$$= 2 \cdot \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{dx}\right] =$$
$$= 2 \cdot \left[-\frac{\ln x}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right] =$$
$$= -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} = \underline{\frac{-2\ln x - 2}{x}}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln^2 x \,\mathrm{dx} = -\frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 - \int -\frac{1}{x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{(\ln x)^2}{x} + \int \frac{2}{x^2} \cdot \ln x \,\mathrm{dx} = \text{ nochmals partielle Integration!}$$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} + \left(-\frac{2}{x} \cdot \ln x\right) - \int -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} =$$

$$= \underline{\frac{-\ln^2 x - 2 \ln x - 2}{x}}$$

$$\int f(x)^2 \,\mathrm{dx} = -\frac{1}{x} + \frac{-2 \ln x - 2}{x} + \frac{-\ln^2 x - 2 \ln x - 2}{x} =$$

$$= \frac{-1 - 2 \ln x - 2 - \ln^2 x - 2 \ln x - 2}{x} =$$

$$= \underline{\frac{-\ln^2 x - 4 \ln x - 5}{x}}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)^2 \,\mathrm{dx} =$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{x} \cdot \left(\ln^2 x + 4 \ln x + 5\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} =$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{e} \cdot (1 + 4 + 5) + e \cdot (1 - 4 + 5)\right] =$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{10}{e} + 2e\right] = \frac{-10 + 2e^2}{e}\pi \approx \underline{\underline{5.52\,\mathrm{E}^3}}$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(\ln x - 1)$. Diskutiere und zeichne die Funktion. Berechne die Fläche zwischen Kurve und x-Achse. $[A = 0.25e^2]$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \ln x$. Diskutiere und zeichne die Funktion. Berechne die Fläche zwischen y-Achse, Kurve und der Tangente in P$(1|y)$. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen? $[A = 0.25$, $V = \frac{7\pi}{27}]$

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3 \ln x}{x}$. Diskutiere und zeichne die Funktion. Berechne die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und $x = \frac{1}{e}$. Die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und $x = e$ rotiert um die x-Achse. Berechne das Rotationsvolumen. $[A = \frac{3}{2}, V = 4.54]$

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln^2 x + \ln x - 2$. Bestimme D, N, E, W der Funktion und stelle sie graphisch dar. Berechne die Fläche, die von der Kurve und der Geraden $y = -2$ eingeschlossen wird. $[A = 0.1]$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln^2 x + \ln x - 2 \\
f'(x) &= 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \\
f''(x) &= 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} \cdot \ln x + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} + (-1) \cdot x^{-2} = \\
&= -\frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \\
&= -\frac{1}{x^2} \cdot (2\ln x - 2 + 1) = -\frac{1}{x^2} \cdot (2\ln x - 1) \\
f'''(x) &= -(-2) \cdot x^{-3} \cdot (2\ln x - 1) + (-\frac{1}{x^2}) \cdot (2 \cdot \frac{1}{x} = \\
&= \frac{2}{x^3} \cdot (2\ln x - 1) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \cdot (2\ln x - 2) = \\
&= \frac{4}{x^3} \cdot (\ln x - 1)
\end{aligned}$$

(1) Definitionsmenge: D=$\mathbb{R}^+$

(2) Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \qquad \ln x = u \\
u^2 + u - 2 &= 0 \\
u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
u_1 = 1 &\qquad u_2 = -2 \\
\ln x_1 = 1 &\qquad \ln x_2 = -2 \\
x_1 = e &\qquad x_2 = \frac{1}{e^2} \\
\underline{\underline{N_1(e|0)}} &\qquad \underline{\underline{N_2(\frac{1}{e^2}|0)}}
\end{aligned}$$

(3) Extremwerte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \cdot \ln x &= 0 \qquad | \cdot x \\ 1 + 2 \cdot \ln x &= 0 \\ \ln x &= -\frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$$f''(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{e} \cdot (2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1) = -\frac{1}{e} \cdot (-2) = \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow T$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow \underline{\underline{T(\frac{1}{\sqrt{e}} | -\frac{9}{4})}}$$

(4) Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -\frac{1}{x^2} \cdot (2 \cdot \ln x - 1) &= 0 \\ 2 \ln x &= 1 \\ x &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(\sqrt{e}) &= 4 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \cdot (\frac{1}{2} - 1) = -2e^{-\frac{3}{2}} \neq 0 \\ f(\sqrt{e}) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{W(\sqrt{e} | -\frac{5}{4})}} \end{aligned}$$

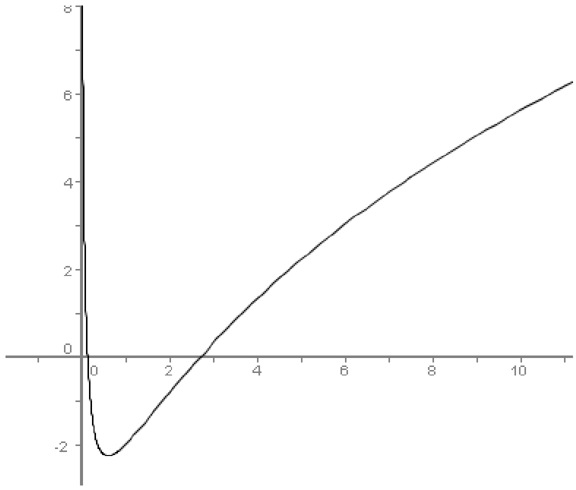
Wendetangente: $y = kx + d$

$$k = f'(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}} = \underline{\frac{2}{\sqrt{e}}}$$

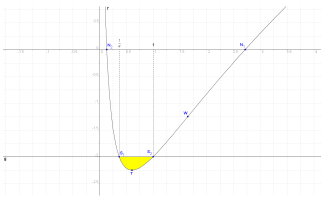
$$\begin{aligned} -\frac{5}{4} &= \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{e} + d \\ d &= \underline{-\frac{13}{4}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{t : y = \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot x - \frac{13}{4}}}$$

(5) Graph:



(6) Flächeninhalt:



Schnittpunkte

$$-2 = \ln^2 x + \ln x - 2$$
$$0 = \ln x \cdot / \ln x + 1)$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{e}$$

$$A = \underbrace{\int_1^{\frac{1}{e}} f(x)\,\mathrm{dx}}_{\text{Fläche zw. Kurve und } x\text{-Achse}} \underbrace{-2 \cdot (1 - \frac{1}{e}}_{\text{Rechteck}} =$$
$$= \int_1^{\frac{1}{e}} \left((\ln x)^2 + \ln x - 2\right)\,\mathrm{dx} - 2 + \frac{2}{e}$$

Nebenrechnungen:

$$\int \ln^2 x\,\mathrm{dx} = \int \ln x \cdot \ln x\,\mathrm{dx} = \qquad \text{(Partielle Integration)}$$
$$= (x \cdot \ln x - x) \cdot \ln x - \int (x \cdot \ln x - x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} =$$
$$= x \cdot \ln^2 x - x \cdot \ln x - \left[\int (\ln x - 1)\,\mathrm{dx}\right] =$$
$$= x \cdot \ln^2 x - x \cdot \ln x - [(x \cdot \ln x - x) - x] =$$
$$= x \cdot \ln^2 x - x \cdot \ln x - x \cdot \ln x + x + x =$$
$$= x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x =$$
$$= \underline{x \cdot (\ln^2 x - 2\ln x + 2)}$$

$$
\begin{aligned}
\int (\ln^2 x + \ln x - 2)\ \mathrm{dx} &= x \cdot (\ln^2 x - 2\ln x + 2) + (x \cdot \ln x - x) - 2x + C = \\
&= x \cdot \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + x \cdot \ln x - x - 2x + C = \\
&= x \cdot \ln^2 x - x \ln x - x + C = \\
&= \underline{x \cdot (\ln^2 x - \ln x - 1) + C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{\frac{1}{e}} \big((\ln x)^2 + \ln x - 2\big)\ \mathrm{dx} - 2 + \frac{2}{e} = \\
&= \big[x \cdot (\ln^2 x - \ln x - 1)\big]_1^{\frac{1}{e}} - 2 + \frac{2}{e} = \\
&= \left[(\frac{1}{e} \cdot (1 - (-1) - 1)) - (1 \cdot (0 - 0 - 1))\right] - 2 + \frac{2}{e} = \\
&= \left[\frac{1}{e} - (-1)\right] - 2 + \frac{2}{e} = \\
&= \frac{1}{e} + 1 - 2 + \frac{2}{e} = \\
&= \underline{\underline{\frac{3}{e}}} - 1 \ \big(\approx 0.104\mathrm{E}^2\big)
\end{aligned}
$$

HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER HIER

(7) Rotationsvolumen:

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx} \\
f(x) &= \frac{1 + \ln x}{x} \\
f(x)^2 &= \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)^2 = \frac{(1 + \ln x)^2}{x^2} = \frac{1 + 2\ln x + \ln^2 x}{x^2} = \\
&= \underline{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2} \cdot \ln^2 x}
\end{aligned}
$$

Um den Überblick zu behalten: Nebenrechnungen! (Die Integrationskonstante C wurde bei der Nebenrechnung weggelassen.)

$$\int f(x)^2\ \mathrm{dx} = \int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{dx} + \int \frac{2}{x^2} \cdot \ln x\ \mathrm{dx} + \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln^2 x\ \mathrm{dx}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2}\cdot \ln x \text{ dx} &= 2\cdot \int \frac{1}{x^2}\cdot \ln(x) \text{ dx} = \text{ Pratielle Integration}\\ &= 2\cdot\left[-\frac{1}{x}\cdot \ln x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\text{ dx}\right] =\\ &= 2\cdot\left[-\frac{\ln x}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right] =\\ &= -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} = \underline{\frac{-2\ln x - 2}{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}\cdot \ln^2 x \text{ dx} &= -\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 - \int -\frac{1}{x}\cdot 2\cdot \ln x\cdot \frac{1}{x}\text{ dx} =\\ &= -\frac{(\ln x)^2}{x} + \int \frac{2}{x^2}\cdot \ln x \text{ dx} = \text{ nochmals partielle Integration!}\\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \left(-\frac{2}{x}\cdot \ln x\right) - \int -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}\text{ dx} =\\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} =\\ &= \underline{\frac{-\ln^2 x - 2\ln x - 2}{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int f(x)^2 \text{ dx} &= -\frac{1}{x} + \frac{-2\ln x - 2}{x} + \frac{-\ln^2 x - 2\ln x - 2}{x} =\\ &= \frac{-1 - 2\ln x - 2 - \ln^2 x - 2\ln x - 2}{x} =\\ &= \underline{\frac{-\ln^2 x - 4\ln x - 5}{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_x &= \pi\cdot\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)^2 \text{ dx} =\\ &= \pi\cdot\left[-\frac{1}{x}\cdot\left(\ln^2 x + 4\ln x + 5\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} =\\ &= \pi\cdot\left[-\frac{1}{e}\cdot(1+4+5) + e\cdot(1-4+5)\right] =\\ &= \pi\cdot\left[-\frac{10}{e} + 2e\right] = \frac{-10+2e^2}{e}\pi \approx \underline{\underline{5.52\,\mathrm{E}^3}}\end{aligned}$$

7. Diskutiere die Funktion $f(x) = x + \ln x$ (Nullstellen näherungsweise!). Berechne die Fläche zwischen der Kurve und den Geraden $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Bestimme den Schnittpunkt der Tangente in P$(1|y)$ mit den Koordinatenachsen. [$A = 5.2958$, S$_1(0| - 1)$, S$_2(0.5|0)$]

8. Von einer Funktion kennt man ihre 1. Ableitung $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$. Der Punkt A$(1|0)$ liegt auf der Funktion. Bestimme die Funktionsgleichung, untersuche sie und zeichne sie. Berechne das von $f(x)$ und $f'(x)$ eingeschlossene Flächenstück. [$A = 0.165$]

9. Diskutiere die Funktion $f(x) = x^2 \cdot \ln \frac{x}{4}$ (Definitionsmenge, Grenzwerte, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Graph). Unter welchem Winkel schneidet die Funktion die Parabel $y = x^2$? Berechne den Flächeninhalt der geschlossenen Flache zwischen der x-Achse und der Funktion! [D=$\mathbb{R}^+$, $lim_{x\to 0+} x^2 \cdot \ln \frac{x}{4} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \ln \frac{x}{4} = \infty$, N$(4|0)$, T$(\frac{4}{\sqrt{e}}| - \frac{8}{e})$, $W(\frac{4}{e\sqrt{e}}| - \frac{24}{e^3})$, $t_W : y = -\frac{8}{e\sqrt{e}} \cdot x + \frac{8}{e^3}$, $\alpha = 0.8769°$, $A = \frac{64}{9}e^3$E^2]