1. Diskutiere die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und zeichne ihren Graphen. Gib die Gleichung der Wendetangente an. Berechne das Volumen, das entsteht, wenn die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im 1. Quadranten um die x-Achse rotiert!

2. Diskutiere die Funktion und zeichne den Graphen:

   (a) $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ (b) $f(x) = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4-2x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$. Untersuche das Grenzverhalten. Ermittle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Graphen in $[-8; \frac{5}{2}]$. Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen, der x-Achse und der Wendetangente begrenzt wird!

4. Für welchen Wert von k liegt P$(1|\frac{1}{e})$ auf der Kurve $y = e^{-kx^2}$? Die gegebene Kurve ist in $[-3, 3]$ unter Berechnung eventuell vorhandener Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte graphisch darzustellen! (Einheit: 2cm). Die zwischen den Wendepunkten gezogene Sehne schließt mit dem über ihr verlaufenden Teil des Graphen eine Fläche ein. Berechne den Rauminhalt, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die y-Achse entsteht!

5. Die Funktion $f(x) = (a + bx) \cdot e^x$ hat den Hochpunkt H$(1|e)$. Bestimme a und b, untersuche ob Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte vorliegen und zeichne den Graphen! Berechne die Fläche, welche die Kurve mit der x-Achse im 1. Quadranten einschließt. Welchem Wert stretbt $\int_{-m}^{0} f$ für $m \to \infty$ zu?

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Diskutiere $f(x)$ und zeichne ihren Graphen. Zeichne in die gleiche Skizze auch das Bild der Funktion $g(x) = \ln x$, und beweise rechnerisch, daß die Fläche zwischen der Kurve $g(x)$, der x-Achse und der Geraden $x = e$ durch die Kurve $f(x)$ halbiert wird.

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x + x \cdot \ln x$. Diskutiere und zeichne die Funktion! Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Kurve und von den Geraden $y = 0$, $x = 1$ und $x = 3$ begrenzt wird. Bestimme die Schnittpunkte der Tangente in P$(1|y)$ mit den Koordinatenachsen.

8. Untersuche $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$. Bestimme Definitionsmenge, das Grenzverhalten der Funktion und soferne vorhanden, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Graphen (1E $\hat{=}$ 2cm). Berechne den Inhalt des im 4. Quadranten liegenden Flächenstückes, das vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird!

9. Diskutiere die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ und berechne die von der Kurve und der x-Achse eingeschlossene Fläche von -5 bis 0.

10. Der Graph $f(x) = \ln(c \cdot x^2 + d \cdot \mathrm{e})$ schneidet die y-Achse in P$(0|1)$ und hat in Q$(\mathrm{e}|y)$ die Steigung $m = \frac{4}{2\mathrm{e}+1}$. Berechne c und d! Diskutiere $f(x)$ und zeichne den Graphen in $[-6, 6]$.

LÖSUNGEN:

1. N$(0|0)$, H$(1|\frac{1}{e})$, W$(2|\frac{2}{e^2})$, $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$, $V=\frac{\pi}{4}$E^3
2. (a) N$(1|0)$ =T, H$(5|\frac{16}{e^2\sqrt{e}})$, W$_1(5-\sqrt{8}|0.463)$, $y=0.559x-0.751$,
   W$_2(5+\sqrt{8}|0.931)$, $y=-0.193x+2.439$
   (b) N$(0|0)$ =W$_2$, $y=2x$, T$(-1|-\frac{2}{\sqrt{e}})$, H$(1|\frac{2}{\sqrt{e}})$,
   W$_{1,3}(\mp\sqrt{3}|\mp\frac{2\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$, $y=-\frac{4}{e\sqrt{e}}x\mp\frac{6\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$
3. $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, N$(2|0)$, H$(0|4)$, W$(-2|\frac{8}{e})$,
   $t_W: 2x-ey=-12$, $A=8e-\frac{8}{e}$
4. $k=1$, D=$\mathbb{R}$, keine Nst., H$(0|1)$, W$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{\sqrt{e}})$, $V=\frac{\pi}{2\sqrt{e}}\cdot(2\sqrt{e}-3)\approx 0.28338$E^3
5. $f(x)=(2-x)e^x$, N$(2|0)$, H$(1|e)$, W$(0|2)$, $A=e^2-3\approx 4.389$,
   $\int_{-m}^0 f(x)dx=3-(3+m)e^{-m}$, $\int_{-\infty}^0 f(x)dx=3$
6. D=$\mathbb{R}^+$, N$(1|0)$, H$(e|\frac{1}{e})$, W$(e\sqrt{e}|\frac{3}{2e\sqrt{e}})$, $t_W: y=-\frac{1}{2e^3}\cdot x+\frac{5}{2e\sqrt{e}}$,
   $A_1=\int_1^e \ln x dx=\dots=1$,
   $A_2=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\dots=\frac{1}{2}$; Anm.: substituiere $\ln x=z$
7. D=$\mathbb{R}^+$, N$(\frac{1}{e}|0)$, T$(\frac{1}{e^2}|-\frac{1}{e^2})$, kein W, $A\approx 6.9437$E^2, $t: -2x+y=-1$, S$_x(\frac{1}{2}|0)$,
   S$_y(0|-1)$
8. D=$\mathbb{R}^+$, $\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, N$_1(1|0)$, N$_2(e|0)$, T$(\sqrt{e}|-\frac{1}{4})$,
   W$(e\sqrt{e}|\frac{3}{4})$, $t_W: y=\frac{2}{e\sqrt{e}}\cdot x-\frac{5}{4}$, $A=3-e$ E^2
9. N=T$(0|0)$, H$(-2|\frac{4}{e^2})$, W$_1(-0.59|0.19)$, W$_2(-3.41|0.38)$, A≈ 1.75E^2
10. $c=2$, $d=1$, D=$\mathbb{R}$, T$(0|1)$, W$_1(\sqrt{\frac{e}{2}}|\ln 2e)$, W$_2(-\sqrt{\frac{e}{2}}|\ln 2e)$, $A=2.36$E^2

1. Diskutiere die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und zeichne ihren Graphen. Gib die Gleichung der Wendetangente an. Berechne das Volumen, das entsteht, wenn die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im 1. Quadranten um die x-Achse rotiert!

2. Diskutiere die Funktion und zeichne den Graphen:

   (a) $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ (b) $f(x) = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4-2x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$. Untersuche das Grenzverhalten. Ermittle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Graphen in $[-8; \frac{5}{2}]$. Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen, der x-Achse und der Wendetangente begrenzt wird!

4. Für welchen Wert von k liegt P$(1|\frac{1}{e})$ auf der Kurve $y = e^{-kx^2}$? Die gegebene Kurve ist in $[-3, 3]$ unter Berechnung eventuell vorhandener Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte graphisch darzustellen! (Einheit: 2cm). Die zwischen den Wendepunkten gezogene Sehne schließt mit dem über ihr verlaufenden Teil des Graphen eine Fläche ein. Berechne den Rauminhalt, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die y-Achse entsteht!

5. Die Funktion $f(x) = (a + bx) \cdot e^x$ hat den Hochpunkt H$(1|e)$. Bestimme a und b, untersuche ob Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte vorliegen und zeichne den Graphen! Berechne die Fläche, welche die Kurve mit der x-Achse im 1. Quadranten einschließt. Welchem Wert stretbt $\int_{-m}^{0} f$ für $m \to \infty$ zu?

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Diskutiere $f(x)$ und zeichne ihren Graphen. Zeichne in die gleiche Skizze auch das Bild der Funktion $g(x) = \ln x$, und beweise rechnerisch, daß die Fläche zwischen der Kurve $g(x)$, der x-Achse und der Geraden $x = e$ durch die Kurve $f(x)$ halbiert wird.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x^3 - (2\ln x - 3) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2 - 6\ln x + 9}{x^4} = \frac{11 - 6\ln x}{x^4}$$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

$\underline{\underline{\text{N}(1|0)}}$

Extremwerte:

$$f'(x) = 0$$
$$1 - \ln x = 0$$
$$\ln x = 1$$
$$x = e$$

$$f''(e) = \frac{2 - 3}{e} = -\frac{1}{e} < 0$$

$\underline{\underline{\text{H}(e|\frac{1}{e})}}$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$
$$2\ln x - 3 = 0$$
$$\ln x = \frac{3}{2}$$
$$x = e^{\frac{3}{2}} = e \cdot \sqrt{e}$$

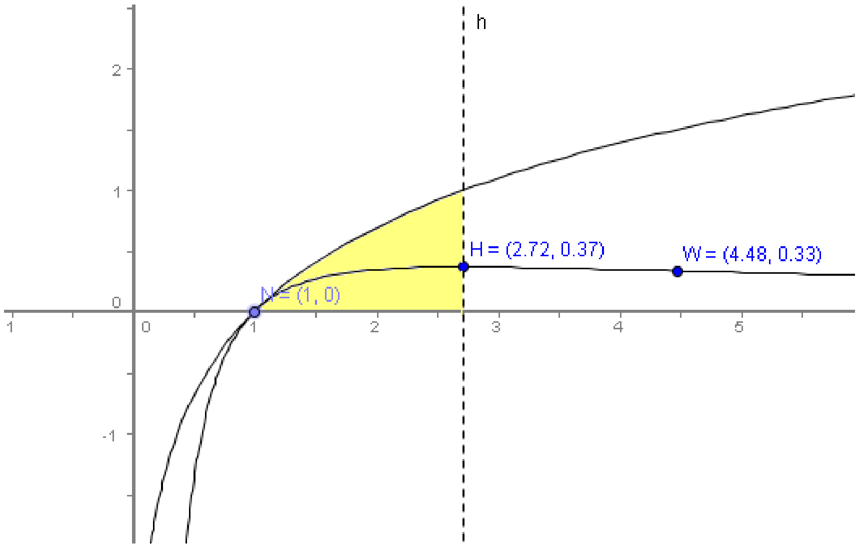
$$f'''(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e\sqrt{e}} \neq 0$$

$$\underline{\underline{W(e\sqrt{e}|\tfrac{3}{2e\sqrt{e}})}}$$

Wendetangente: $y = k \cdot x + d$

$$k = f'(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{1-\frac{3}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}$$
$$d = y - k \cdot x = \frac{3}{2e\sqrt{e}} + \frac{1}{2e^3} \cdot e\sqrt{e} = \frac{3e+2e}{2e^2\sqrt{e}} = \frac{5e}{2e^2\sqrt{e}} = \frac{5}{2e\sqrt{e}}$$

$$\underline{\underline{t_W : y = -\tfrac{1}{2e^3} \cdot x + \tfrac{5}{2e\sqrt{e}}}}$$



Fläche:

$$A_1 = \int_1^e g(x)\ \mathrm{dx} = \int_1^e \ln x\ \mathrm{dx} =$$
$$= [x \cdot \ln x - x]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) =$$
$$= 0 + 1 = \underline{\underline{1\,\mathrm{E}^2}}$$

$$A_2 = \int_1^e f(x)\ \mathrm{dx} = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{dx} =$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x\ \mathrm{dx} = \left[\frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2\right]_1^e =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{E}^2}}$$

$$A_1 : A_2 = 1 : \frac{1}{2}$$
$$A_1 : A_2 = 2 : 1$$

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x + x \cdot \ln x$. Diskutiere und zeichne die Funktion! Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Kurve und von den Geraden $y = 0$, $x = 1$ und $x = 3$ begrenzt wird. Bestimme die Schnittpunkte der Tangente in P$(1|y)$ mit den Koordinatenachsen.

8. Untersuche $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$. Bestimme Definitionsmenge, das Grenzverhalten der Funktion und soferne vorhanden, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Graphen (1E $\hat{=}$ 2cm). Berechne den Inhalt des im 4. Quadranten liegenden Flächenstückes, das vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird!

9. Diskutiere die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ und berechne die von der Kurve und der x-Achse eingeschlossene Fläche von -5 bis 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot e^x \\ f'(x) &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \\ &= e^x \cdot (x^2 + 2x) \\ f''(x) &= e^x \cdot (x^2 + 2x) + e^x \cdot (2x + 2) = \\ &= e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

(1) D=$\mathbb{R}$

(2) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot e^x &= 0 \qquad | : e^x (\neq 0) \\ x &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{N(0|0)}} \end{aligned}$$

(3) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} e^x \cdot (x^2 + 2x) &= 0 \\ x(x+2) &= 0 \\ x_1 = 0 \qquad x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$f''(0) = 1 \cdot 2 = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(0|0)}}$$

$$f''(-2) = e^{-2} \cdot (4 - 8 + 2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{H(-2|\frac{4}{e^2})}}$$

(4) Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} & e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) = 0 \\ & x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2} = -2 \pm \sqrt{2} \\ & x_1 = -2 + \sqrt{2} \qquad x_2 = -2 - \sqrt{2} \\ & \underline{\underline{W_1(-0,59|0,19)}} \qquad \underline{\underline{W_2(-3,41|0,38)}} \end{aligned}$$

Flächeninhalt:

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{-5}^{0} x^2 \cdot e^x \,\mathrm{dx} = \\
&= \left[e^x \cdot x^2\right]_{-5}^{0} - \int\limits_{-5}^{0} (e^x \cdot 2x) \,\mathrm{dx} = \\
&= (1 \cdot 0) - (e^{-5} \cdot 25) - \left[e^x \cdot 2x|_{-5}^{0} - \int\limits_{-5}^{0} (e^x \cdot 2) \,\mathrm{dx} \right] = \\
&= -\frac{25}{e^5} - 0 - e^{-5} \cdot 10 + \left[2e^x\right]_{-5}^{0} = \\
&= -\frac{25}{e^5} - \frac{10}{e^5} + 2 - 2e^{-5} = \\
&= 2 - \frac{37}{e^5} \approx \underline{\underline{1.75\,\mathrm{E}^2}}
\end{aligned}
$$

10. Der Graph $f(x) = \ln(c \cdot x^2 + d \cdot \mathrm{e})$ schneidet die y-Achse in P$(0|1)$ und hat in Q$(\mathrm{e}|y)$ die Steigung $m = \frac{4}{2\mathrm{e}+1}$. Berechne c und d! Diskutiere $f(x)$ und zeichne den Graphen in $[-6, 6]$.

$$f(x) = \ln(cx^2 + d\mathrm{e})$$
$$f'(x) = \frac{1}{cx^2 + d\mathrm{e}} \cdot 2cx = \frac{2cx}{cx^2 + d\mathrm{e}}$$

$f(0) = 1:$ $\quad \ln(d\mathrm{e}) = 1$

$f'(\mathrm{e}) = \frac{4}{2\mathrm{e}+1}:$ $\quad \frac{2c\mathrm{e}}{c\mathrm{e}^2+d\mathrm{e}} = \frac{4}{2\mathrm{e}+1}$

$$\text{I: } \ln(d\mathrm{e}) = 1 \quad |\mathrm{e}^{\cdots}$$
$$d\mathrm{e} = \mathrm{e} \quad |:e$$
$$d = 1$$

$$\text{II: } 2c\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1) = 4(c\mathrm{e}^2 + \mathrm{e})$$
$$2c\mathrm{e} + 4c\mathrm{e}^2 = 4c\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} \quad |:e$$
$$2c = 4 \quad |:2$$
$$c = 2$$

$$\underline{\underline{f(x) = \ln(2x^2 + \mathrm{e})}}$$

$$f(x) = \ln(2x^2 + \mathrm{e})$$
$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + \mathrm{e}} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2 + \mathrm{e}}$$
$$f''(x) = \frac{4(2x^2 + \mathrm{e}) - 4x(4x)}{(2x^2 + \mathrm{e})^2} = \frac{8x^2 + 4\mathrm{e} - 16x^2}{(2x^2 + \mathrm{e})^2} = \frac{-8x^2 + 4\mathrm{e}}{(2x^2 + \mathrm{e})^2}$$
$$f'''(x) = \frac{(-16x)(2x^2 + \mathrm{e})^2 - (-8x^2 + 4\mathrm{e})2(2x^2 + \mathrm{e})(4x)}{(2x^2 + \mathrm{e})^4} =$$
$$= \frac{(-16x)(2x^2 + \mathrm{e}) - (-8x^2 + 4\mathrm{e})8x}{(2x^2 + \mathrm{e})^3} =$$
$$= \frac{-32x^3 - 16\mathrm{e}x + 64x^3 - 32\mathrm{e}x}{(2x^2 + \mathrm{e})^3} = \frac{32x^3 - 48\mathrm{e}x}{(2x^2 + \mathrm{e})^3}$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \ln(2x^2+\mathrm{e}) &= 0 \quad |\mathrm{e}^{\cdots} \\ 2x^2+\mathrm{e} &= 1 \quad |-\mathrm{e} \\ 2x^2 &= 1-\mathrm{e} \quad |:2 \\ x^2 &= \frac{1-\mathrm{e}}{2} \approx -0,86 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$keine Nullstellen!

Extremwerte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{4x}{2x^2+\mathrm{e}} &= 0 \quad |\cdot(2x^2+\mathrm{e}) \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{4\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} = \frac{4}{\mathrm{e}} > 0$$

$\underline{\underline{T(0|1)}}$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{-8x^2+4\mathrm{e}}{(2x^2+\mathrm{e})^2} &= 0 \quad |\cdot(2x^2+\mathrm{e})^2 \\ -8x^2 &= -4\mathrm{e} \quad |:(-8) \\ x^2 &= \frac{\mathrm{e}}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}} \approx \pm 1,1658 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}\right) &\neq 0 \\ f\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}\right) &= \ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}) = \ln(2\mathrm{e}) = \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{W_1\left(\sqrt{\tfrac{\mathrm{e}}{2}}\middle|\ln 2+1\right)}} \approx W_1(1,17|1,69)$

$$\begin{aligned} f'''\left(-\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}\right) &\neq 0 \\ f\left(-\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}\right) &= \ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}) = \ln(2\mathrm{e}) = \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{W_2\left(-\sqrt{\tfrac{e}{2}}\middle|\ln 2+1\right)}} \approx W_2(-1,17|1,69)$$

Wendetangenten: $y = k \cdot x + d$

$$k = f'\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = \frac{4\sqrt{\frac{e}{2}}}{2\frac{e}{2}+e} = \frac{4\sqrt{e}}{\sqrt{2}2e} = \sqrt{\frac{16e}{8e^2}} = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$d = y - k \cdot x = \ln 2 + 1 - \sqrt{\frac{2}{e}} \cdot \sqrt{\frac{e}{2}} = \ln 2 + 1 - \sqrt{\frac{2e}{2e}} = \ln 2$$

$$\underline{\underline{t_{W_1}: y = \sqrt{\tfrac{2}{e}} \cdot x + \ln 2}} \text{ bzw. } t_{W_1}: y = 0,86 \cdot x + 0,69$$

$$k = f'\left(-\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = \frac{-4\sqrt{\frac{e}{2}}}{2\frac{e}{2}+e} = -\sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$d = y - k \cdot x = \ln 2 + 1 - \sqrt{\frac{2}{e}} \cdot \sqrt{\frac{e}{2}} = \ln 2 + 1 - \sqrt{\frac{2e}{2e}} = \ln 2$$

$$\underline{\underline{t_{W_2}: y = -\sqrt{\tfrac{2}{e}} \cdot x + \ln 2}} \text{ bzw. } t_{W_2}: y = -0,86 \cdot x + 0,69$$

Graph: