Differentiation der Exponential- und Logarithmusfunktion

Mag. Mone Denninger

23. Oktober 2004

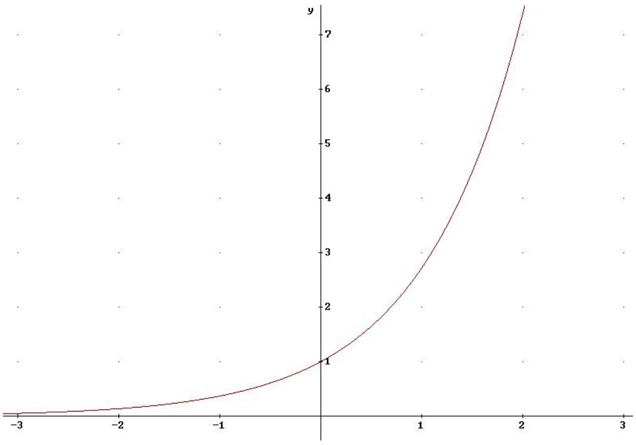
Inhaltsverzeichnis

1 Differentiation der Exponentialfunktion

Unter der **Exponentialfunktion zur Basis** e versteht man die Funktion

$$f(x) = e^x$$

D=$\mathbb{R}$, W=$\mathbb{R}^+$



$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$

Beweis siehe Seite 1 im Buch!

Beispiel 1. Differenziere die Funktion $f(x) = 2^x$!

$$f(x) = 2^x$$
$$f'(x) = 2^x$$

Beispiel 2. Differenziere die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$!

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

Sofern der Exponent von e eine Funktion ist, muss die Kettenregel angewandt werden:

$$\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Beispiel 3. Differenziere die Funktion $f(x) = e^{2x}$

$$f(x) = e^{2x}$$
$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$$

Beispiel 4. Differenziere die Funktion $f(x) = e^{3x^2-4x}$! 1
2
3

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{3x^2-4x} \\ f'(x) &= (6x-4)\cdot e^{3x^2-4x} \end{aligned}$$

Beispiel 5. Differenziere die Funktion $f(x) = x^3 \cdot e^{x^2}$!

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \cdot e^{x^2} \qquad \text{Produktregel! } (u\cdot v)' = u'v + uv' \\ f'(x) &= 3x^2 \cdot e^{x^2} + x^3 \cdot 2x \cdot e^{x^2} = \\ &= 3x^2 \cdot e^{x^2} + 2x^4 \cdot e^{x^2} = \\ &= e^{x^2} \cdot \left(3x^2 + 2x^4\right) \end{aligned}$$

Beispiel 6 (6b). Es ist $f'(x_0)$ der durch die Funktionsgleichung $f(x) = e^x \cdot (\sin x - \cos x)$ gegebenen Funktion für $x_0 = \frac{\pi}{2}$ zu berechnen!

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \cdot (\sin x - \cos x) \qquad x_0 = \frac{\pi}{2} \\ f'(x) &= e^x \cdot (\sin x - \cos x) + e^x \cdot (\cos x + \sin x) = \\ &= e^x(\sin x - \cos x + \cos x + \sin x) = \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot e^x \end{aligned}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1 \text{ (RAD!)}} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \approx 9,620954762\ldots$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) \approx 9,62$$

4
5
6ac

2 Differentiation der Logarithmusfunktion

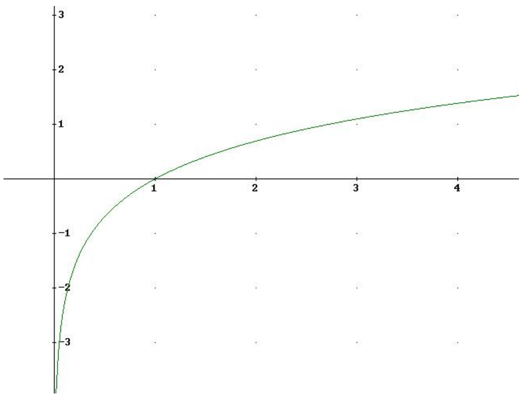
Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die $a^x = b$ ($a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, $b \in \mathbb{R}^+$) gilt, heißt **Logarithmus von** b **zur Basis** a:

$$a^x = b \Leftrightarrow x =^a \log b$$

Unter der **Logarithmusfunktion zur Basis** e versteht man die Funktion

$$f(x) = \ln x$$

D=$\mathbb{R}^+$, W=$\mathbb{R}$



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

2.1 Herleitung der Ableitung von $\ln x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \qquad \text{ges. } f'(x) \\ y &= \ln x \\ e^y &= x \\ e^{\ln x} &= x \end{aligned}$$

wie leiten beide Seiten ab:

$$\begin{aligned} \left(e^{\ln x}\right)' &= (x)' \\ e^{\ln x} \cdot (\ln x)' &= 1 \end{aligned}$$

nach $(\ln x)'$ umformen:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{e^{\ln x}} \\ \text{da } e^{\ln x} &= x: \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 7. Differenziere die Funktion $f(x) = 3 \cdot \ln x$!

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cdot \ln x \\ f'(x) &= \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 8. Bilde die erste Ableitung von $f(x) = \ln x^2$!

Wir benötigen wiederum die Kettenregel:

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

Beispiel 9. Differenziere die Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2$!

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2 \\
f'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3x-2}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = \\
&= \frac{3}{\frac{3x-2}{2}} = \frac{6}{3x-2}
\end{aligned}$$

7
8

Beispiel 10 (9a). Es ist $f'(x_0)$ der Funnktion $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$ mit $x_0 = -3$ zu berechnen!

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{1}{\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2x(1+x^2)-x^2(2x)}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x\left[2+2x^2-2x^2\right]}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2}{x(1+x^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= -3 \\
f'(-3) &= \frac{2}{(-3)(1+(-3)^2)} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}\,(\approx -0,07)
\end{aligned}$$

9bc
10
11
12

2.2 Implizit Differentieren

Beispiel 11 (15a). Sofern die Funktionsgleichung zweier Variablen x und y nach keiner der Variablen gelöst ist (z.B. $5x - y = 3$), spricht man von einer sogenannten impliziten Funktion. Durch Lösen der Gleichung nach y ($y = 5x - 3$) erhält man die Gleichung der expliziten Funktion. (1) Die Relation $2x^2 + xy - 3y^2 = 0$ ist nach y zu lösen und zu differenzieren. (2) Weiters ist die erste Ableitung durch implizite Differentiation zu bilden!

(1) umformen:

$$3y^2 - xy - 2x^2 = 0$$

mit der ABC-Formel nach y auflösen:

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ y_{1,2} &= \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2x^2}}{2 \cdot 3} = \\ &= \frac{x \pm \sqrt{25x^2}}{6} = \frac{x \pm 5x}{6} \\ y_1 = x &\qquad y_2 = -\frac{2}{3}x \\ y_1' = 1 &\qquad y_2' = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2) implizite Differentiation:

$$\begin{aligned} &\left(2x^2 + xy - 3y^2 = 0\right)' \\ 4x + &\underbrace{y + xy'}_{\text{Produktregel}} - \underbrace{6yy'}_{\text{Kettenregel}} = 0 \end{aligned}$$

nach y' umformen:

$$\begin{aligned} 4x + y &= y'(6y - x) \\ y' &= \frac{4x + y}{6y - x} \end{aligned}$$

(würde man hier nun für y x bzw. $-\frac{2}{3}x$ einsetzen, kommt man wieder auf die Ergebnisse 1 und $-\frac{2}{3}$) 15bc

Beispiel 12 (16a). Es ist der Anstieg der Kurve $x^2+y^2 = 25$ (Mittelpunktskreis mit $r = 5$) im Punkt P$(3|y)$ zu berechnen!

$$
\begin{aligned}
&P(3|y)\\
&\quad y^2 = 25 - x^2\\
&\quad y = \pm\sqrt{25-x^2} = \pm\left(25-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad y' = \pm\frac{1}{2}\left(25-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) =\\
&\quad\quad = \mp\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3\\
y' &= \mp\frac{3}{\sqrt{25-9}} = \mp\frac{3}{\sqrt{16}} = \underline{\underline{\mp\frac{3}{4}}}
\end{aligned}
$$

2.3 Logarithmische Differentiation

Beispiel 13 (17a). Sofern $y = f(x)$ positiv ist, können wir beide Seiten der Gleichung zur Basis e logarithmieren: $\ln y = \ln f(x)$. Differenziert man die Linke und die Rechte Gleichungsseite nach x, ergibt sich unter beachtung der Kettenregel $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$. Aus dem letzten Ausdruck lässt sich y' berechnen; das Verfahren nennt man logarithmische Differentiation. Die logarithmische Differentiation ist manchmal vorteilhafter als der übliche Weg zur Berechnung der Ableitung.
Vor allem bei Problemstellungen, die die Veränderliche sowohl in der Basis, als auch im Exponenten enthalten, ist dies der Fall. Bei der folgenden Aufgabe ist die logarithmische Differentiation anzuwenden: $f(x) = x^x$, $f'(3)$=?

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^x & &|\ln \\
\ln f(x) &= x \cdot \ln x & &|' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \underbrace{x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x}_{\text{Produktregel}} \\
f'(x) &= f(x) \cdot [1 + \ln x] = \\
&= x^x \cdot (1 + \ln x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= 3^3 \cdot (1 + \ln 3) \\
f'(3) &\approx \underline{\underline{56,66253179}}
\end{aligned}$$

17bc

Beispiel 14 (31b). Berechne die erste Ableitung mittels logarithmischer Differentiation!

$$\begin{aligned}
f(x) &= (e^x)^x & &|\ln \\
\ln f(x) &= x \cdot \ln e^x & &|' \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \ln e^x + x \cdot \frac{1}{e^x} e^x \\
f'(x) &= (e^x)^x \cdot \left(\underbrace{\ln e^x}_{x} + x \right) \\
f'(x) &= (e^x)^x \cdot 2x \\
f'(x) &= 2x \cdot e^{x^2}
\end{aligned}$$

31ag

3 Kurvendiskussion

Beispiel 15 (33). Die Funktion mit der Gleichung

(a) $f(x) = x \cdot \ln x$

(b) $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$

(c) $f(x) = x + \ln x - 1$

(d) $f(x) = 2\ln(x^2 - 1)$

(e) $f(x) = x \cdot e^x$

(f) $f(x) = 2xe^{-x}$

(g) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$

(h) $f(x) = 0.5 \cdot \frac{e^x}{1+x}$

ist zu diskutieren!

(a) $f(x) = x \cdot \ln x$ Hü

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \ln x \\
f'(x) &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\
f''(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
f'''(x) &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

(1) $\mathrm{D} = \mathbb{R}^+$

(2) Nullstelle:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x \cdot \ln x &= 0 \\
x = 0 \text{ oder } \ln x &= 0 \qquad |e^{\cdots} \\
x &= e^0 = 1 \\
x &= 1 \\
\underline{\underline{N_1(0|0)}} &\qquad \underline{\underline{N_2(1|0)}}
\end{aligned}
$$

(3) Extremwerte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \qquad |e^{\cdots} \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$f''(\frac{1}{e}) = e > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T(\frac{1}{e}|-\frac{1}{e})}}$$

(4) Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 0 \qquad | \cdot x \\ 1 &= 0 \quad \text{f.A.} \ \Rightarrow \ \text{kein Wendepunkt} \end{aligned}$$

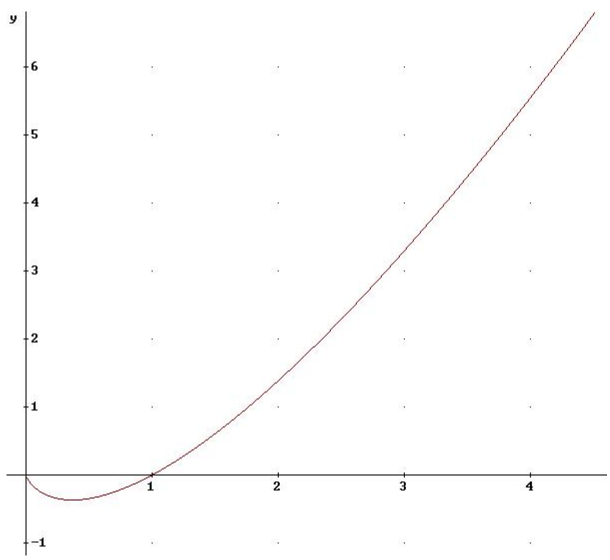
(5) Monotonie:

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x < \infty$
$f'(x)$	< 0	0	> 0
$f(x)$	str. mo. fa.	T	str. mo. st.

(6) Krümmungsverhalten:

	$0 < x < \infty$
$f''(x)$	> 0
$f(x)$	pos. gekr. links gekr.

(7) Graph:



(b) $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$ Hü

(c) $f(x) = x + \ln x - 1$ Sü

(d) $f(x) = 2\ln(x^2 - 1)$

(e) $f(x) = x \cdot e^x$

(f) $f(x) = 2xe^{-x}$

(g) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$

(h) $f(x) = 0.5 \cdot \frac{e^x}{1+x}$

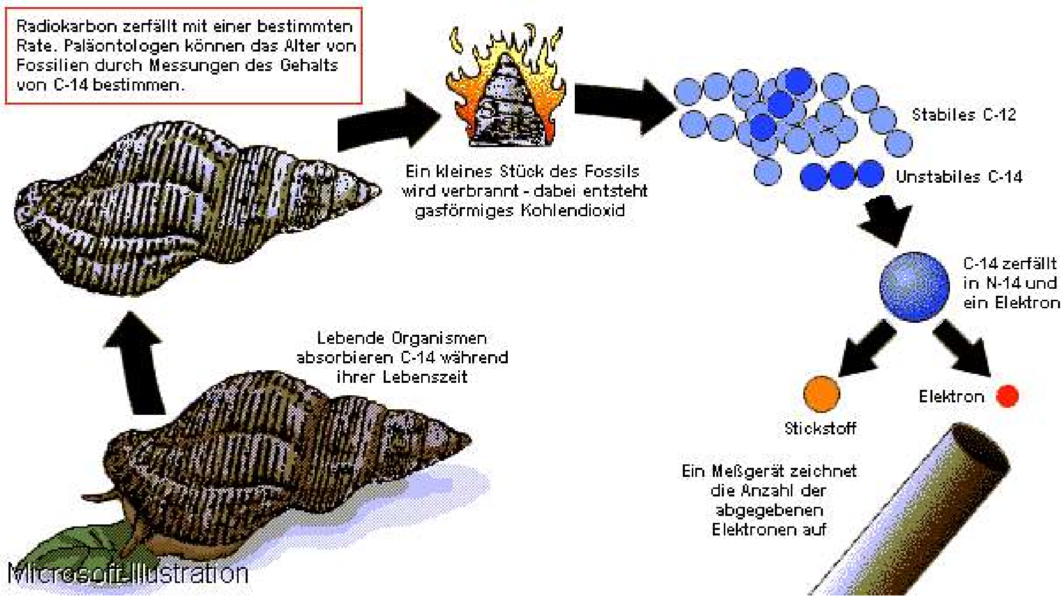
4 Anwendungen der Exponentialfunktion

4.1 Wachstums- und Zerfallsprozesse

Viele Wachstums- und Zerfallsprozesse können durch Exponentialfunktionen beschrieben werden. Mit Hilfe der Ableitung können momentane Wachstumsgeschwindigkeit bzw. Zerfallsgeschwindigkeit beschrieben werden. Für diese Wachstums- bzw. Zerfallsfunktionen gilt

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad N(t) = N_0 \cdot a^t$$

Dabei ist N_0 der Bestand zur Zeit 0 und λ die Wachstumskonstante bzw. Zerfallskonstante. Für Wachstumsprozesse gilt $\lambda > 0$, für Zerfallsprozesse gilt $\lambda < 0$.



Die C_{14}-Methode

(eigentlich: ^{14}C)
Um das Alter von Gesteinen oder anderen Materialien zu bestimmen, verwendet man Isotope bestimmter Elemente. Isotop ist die Bezeichnung für die Nuklide eines chemischen Elements. Isotope sind also Nuklide gleicher Kernladungs- und Ordnungszahl (Protonenzahl), aber unterschiedlicher Anzahl der im Kern enthaltenen Neutronen und damit unterschiedlicher Massenzahl (Nukleonenzahl). Vom Stickstoff zum Beispiel gibt es zwei stabile Isotope: N_{14} (also 14 Neutronen) und N_{15} (15 Neutronen). Daneben gibt es vom Stickstoff allerdings auch noch sechs instabile Isotope, d.h. sie zerfallen nach einer bestimmten Zeit. Gemessen wird dabei die sogenannte **Halbwertszeit**, also die Zeitspanne, in der die Hälfte eines Ausgangsmaterials zerfallen bzw. umgewandelt ist. Im Falle der instabilen Stickstoff-Isotope liegt sie zwischen 11ms (N_{12}) und 9.96min (N_{13}). Aus den Halbwertszeiten der in extraterrestrischem Material nachgewiesenen Elemente lassen sich gegebenenfalls Rückschlüsse auf das Alter des Sonnensystems bzw. der Sterne ziehen.
Da die Isotope eines Elements die gleiche Anzahl an Protonen im Kern aufweisen, haben sie auch die gleiche Anzahl an Elektronen in der Hülle. Sie verhalten sich somit chemisch gleichartig. Viele Radioisotope (Bezeichnung für die radioaktiven Isotope eines best. Elements) lassen sich anhand ihrer charakteristischen Strahlung leicht nachweisen. Sie werden deshalb in vielfältiger Weise benutzt, um das Verhalten der reinen Elemente oder deren Verbindungen in der belebten und unbelebten Natur zu erforschen.
Die Isotope des Kohlenstoff werden normalerweise nur benutzt, um junge Materialien im Boden zu datieren. Mit C_{14}-Atomen markierte Verbindungen finden Verwendung als Radioindikatoren. In einer Altersbestimmungsmethode spielt das Mengenverhältnis C_{14}:C_{12} in organischen Resten eine Rolle. Man nennt diese Altersbestimmungsmethode Radiocarbon-Methode oder C_{14}-Datierung. Dies ist die Bezeichnung für eine von LIBBY seit 1947 entwickelten physikalischen Methode, die eine Alterbestimmung von ehemals belebten Materialien (z.B. Holz, Knochen, Zähne, Torf) oder von Carbonaten (z.B. Muschelschalen) enthaltenden Gegenstände mit einem verhältnismäßig hohen Genauigkeitsgrad ermöglicht. Die C_{14}-Datierung beruht darauf, dass durch die Primär-Teilchen der kosmischen Strahlung in der Atmosphäre Neutronen gebildet werden, die aus dem Stickstoff der Luft nach N_{14}(n,p) C_{14} radioaktiven Kohlenstoff bilden, der mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren unter Aussendung von β-Strahlen geringer Energie wieder im N_{14} übergeht. Die frisch gebildeten C_{14}-Atome werden in der Atmosphäre rasch zu Kohlenstoffdioxid oxidiert, das sich gleichmäßig mit dem atmosphärischen CO_2 vermischt und zusammen mit diesem in den Kohlenstoff-Kreislauf eingeht.
Nach dem Tod hört der Stoffwechsel jedoch auf, und da von einem toten Organismus somit kein radioaktives C_{14} mehr aufgenommen werden kann, zerfällt der zum Zeitpunkt des Todes vorhandene C_{14}-Anteil. Bei etwa 17 150 Jahre alten Leichen ist der Gehalt an radioaktivem Kohlenstoff auf $\frac{1}{8}$ des zu Lebzeiten vorhandenen Betrages abgesunken. Die C_{14}-Datierung ermöglicht plausible Altersbestimmungen für Zeiträume von 1 000 bis 40 000 Jahren; eine Ausdehnung bis zu 100 000 Jahren erscheint möglich, denn neuerdings bestimmt man das C_{14}/C_{12}-Verhältnis direkt durch Massenspektroskopie. Da die radioaktive Zerfallsgeschwindigkeit durch äußere Bedingungen wie Druck und Temperatur nicht beeinflussbar ist und auch davon unabhängig ist, in welcher chemischen Verbindung ein radioaktives Nuklid vorliegt, kann der radioaktive Zerfall als geologische Uhr verwendet werden.

Beispiel 16 (Die C_{14}-Methode). C_{14} hat eine Halbwertszeit von 5600 Jahren.

(a) Berechne die Zerfallskonstante λ und gib das Zerfallsgesetz an! Berechne die prozentuelle Abnahme pro Jahr!

(b) Bestimme das Alter des Materials dessen C_{14}-Gehalt auf 7% des ursprünglichen Wertes abgesunken ist.

(c) Wie viel Gramm C_{14} sind nach 4000 Jahren von einer Ausgangsmenge von 100g noch übrig?

(d) Mit welcher Geschwindigkeit zerfällt ein Ausgangsmaterial von 200g C_{14} nach 10000 Jahren?

(e) Skizziere diesen Zerfall für N_0=100g.

(f) Wie viel % der ursprünglichen Menge sind nach 1000 Jahren zerfallen?

Beispiel 17 (Die C_{14}-Methode). Siehe c14Methode.tex: Handout und Angabe! C_{14} hat eine Halbwertszeit von 5600 Jahren.

(a) Berechne die Zerfallskonstante λ und gib das Zerfallsgesetz an! Berechne die prozentuelle Abnahme pro Jahr!

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t} && \text{ges. } \lambda \\ \text{nach 5600J.} \quad N(5600) &= \frac{N_0}{2} \\ \frac{N_0}{2} &= N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5600} && | : N_0 \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda \cdot 5600} && | \ln \\ \ln \frac{1}{2} &= -\lambda \cdot 5600 && | : (-5600) \\ \frac{\ln \frac{1}{2}}{-5600} &= \lambda \\ \lambda &= 0,000123776 \\ N(t) &= N_0 \cdot e^{-0,000123776 \cdot t} \end{aligned}$$

Prozentuelle Abnahme pro Jahr:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot a^t \\ a &= e^{-0,000123776} \\ N(t) &= N_0 \cdot 0,9999^t \\ 1 - 0,9999 &= 0,0001 \\ &\quad 0.01\% \text{ Abnahme/Jahr} \end{aligned}$$

(b) Bestimme das Alter des Materials dessen C_{14}-Gehalt auf 7% des ursprünglichen Wertes abgesunken ist.

$$\begin{aligned} N_0 \cdot 0,07 &= N_0 \cdot e^{0,000123776 \cdot t} \\ \ln 0,07 &= -0,000123776 \cdot t \\ t &= 21484,4 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

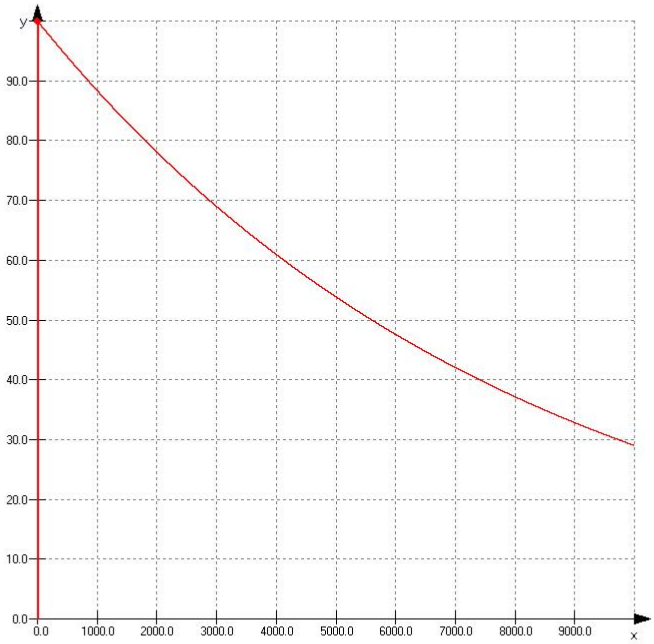
(c) Wie viel Gramm C_{14} sind nach 4000 Jahren von einer Ausgangsmenge von 100g noch übrig?

$$\begin{aligned} N(4000) &= 100 \cdot e^{-0,000123776 \cdot 4000} \\ N(4000) &\approx 60,95\text{g} \end{aligned}$$

(d) Mit welcher Geschwindigkeit zerfällt ein Ausgangsmaterial von 200g C_{14} nach 10000 Jahren?

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}000123776 \cdot t}$$
$$N'(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}000123776 \cdot t} \cdot (-0{,}000123776)$$
$$\Uparrow \text{Zerfallsgeschwindigkeit}$$
$$N'(10000) = -0{,}000123776 \cdot 200 \cdot e^{-0{,}000123776 \cdot 10000}$$
$$N'(10000) = -0{,}00718 \text{g/Jahr}$$

(e) Skizziere diesen Zerfall für N_0=100g:



(f) Wie viel % der ursprünglichen Menge sind nach 1000 Jahren zerfallen?

$$N(1000) = N_0 \cdot e^{-0{,}000123776 \cdot 1000}$$
$$N(1000) = N_0 \cdot 0{,}88358$$
$$1 - 0{,}88358 = 0{,}1164$$
$$11{,}64\% \text{ Abnahme}$$