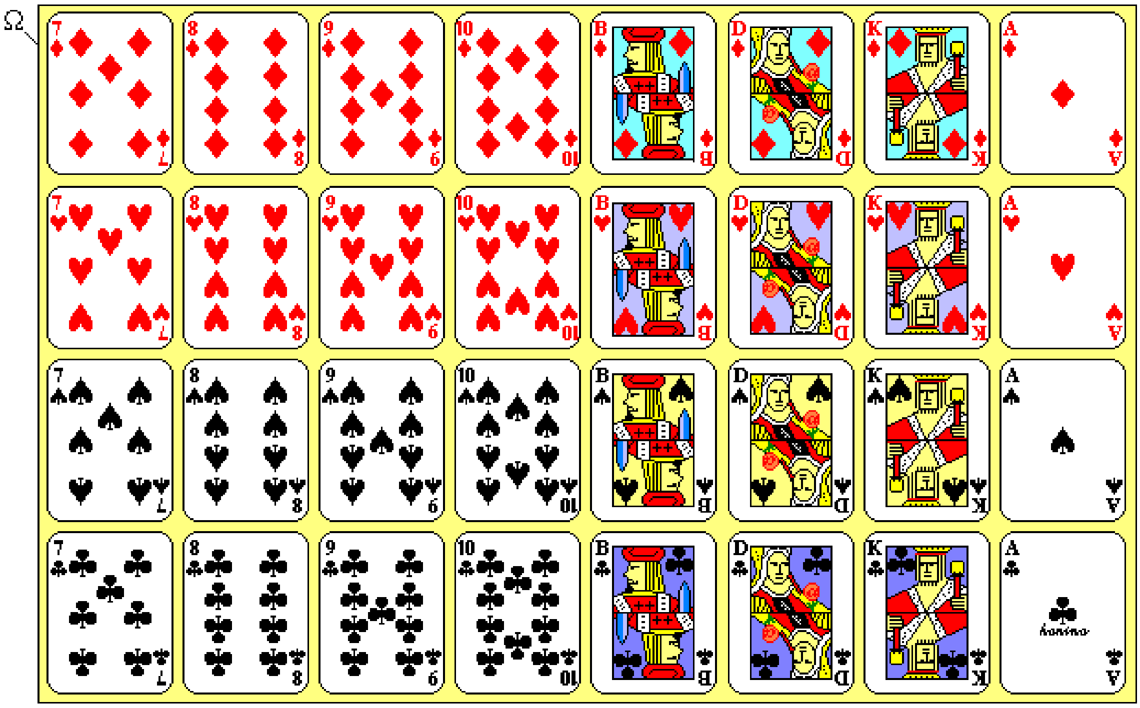
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Mag. Mone Denninger

13. November 2005



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Neben dieser Zusammenfassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung möchte ich drei Bücher sehr empfehlen:

- Walter Krämer, Statistik verstehen - Eine Gebrauchsanweisung, Piper Verlag, 2004, ISBN 3-492-23039-3
- Walter Krämer, So lügt man mit Statistik, Piper Verlag, 2004, ISBN 3-492-23038-5
- Hans Christian Reichel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1, hpt, 1992, ISBN 3-209-00736-5

1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

Die Statistik gliedert sich in

- die **Beschreibende Statistik**, die Daten erfasst und diese durch Tabellen, Graphiken und Kennzahlen, möglichst übersichtlich beschreibt;
- die **Beurteilende Statistik**, die auf Basis der Beschreibenden Statistik prognostiziert und vergleicht, sich also z. B. mit der Qualitätskontrolle von Produkten beschäftigt.

1.1 Absolute und relative Häufigkeit

Die absolute Häufigkeit $h(x_i)$ eines Merkmals x_i bei einer Stichprobe vom Umfang n ist jene Zahl, die angibt, wie oft das Merkmal x_i auftritt.

Die relative Häufigkeit $r(x_i)$ eines Merkmals x_i bei einer Stichprobe vom Umfang n ist gegeben durch:

$$r(x_i) = \frac{h(x_i)}{n} = \frac{\text{Absolute Häufigkeit des Merkmals } x_i}{\text{Umfang } n \text{ der Stichprobe}}$$

Beispiel 1. Bei 100 gleichaltrigen Schülern wurde die Körpergröße in cm gemessen. Berechne die relativen Häufigkeiten.

Körpergröße	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154
Anzahl der Schüler	2	1	3	5	8	11	14	13	12	9
Körpergröße	155	156	157	158	159	160				
Anzahl der Schüler	7	5	4	2	3	1				

i	Körpergröße = Merkmal x_i	absolute Häufigkeit $h(x_i)$	relative Häufigkeit $r(x_i)$	relative Häufigkeit in Prozenten
1	145cm	2	0,02	2%
2	146cm	1	0,01	1%
3	147cm	3	0,03	3%
4	148cm	5	0,05	5%
5	149cm	8	0,08	8%
6	150cm	11	0,11	11%
7	151cm	14	0,14	14%
8	152cm	13	0,13	13%
9	153cm	12	0,12	12%
10	154cm	9	0,09	9%
11	155cm	7	0,07	7%
12	156cm	5	0,05	5%
13	157cm	4	0,04	4%
14	158cm	2	0,02	2%
15	159cm	3	0,03	3%
16	160cm	1	0,01	1%

Manchmal ist es üblich/sinnvoll, die Werte eines Merkmals, die innerhalb bestimmter Grenzen liegen, zu einer Klasse zusammenzufassen. Dabei wird die untere Schranke einer Klasse als Klassenanfang gewählt.

Nr. der Klasse	Körpergröße = Merkmal x_i	absolute H. $h(x_i)$	relative H. $r(x_i)$	$r(x_i)$ in Prozenten
1	145-148cm	6	0,06	6%
2	148-151cm	12	0,12	12%
3	151-154cm	39	0,39	39%
4	154-157cm	21	0,21	21%
5	157-160cm	10	0,10	10%
		$\sum = 100$	$\sum = 1$	$\sum = 100\%$

1.2 Der Mittelwert $\overline{x}$ der Statistik

Definition 1. Das **arithmetische Mittel** $\overline{x}$ (gesprochen : x quer) der Zahlen $x_1, x_2, \ldots,$ x_n erhält man, indem man die Summe dieser Zahlen durch ihre Anzahl n dividiert.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Beispiel 2. Schularbeitsstatistik:

1	2	3	4	5
4	8	15	7	2

x_i	$h(x_i)$	$x_i \cdot h(x_i)$	$r(x_i)$	$x_i \cdot r(x_i)$
1	4	4	$\frac{4}{36} = 0.111$	0.111
2	8	16	0.222	0.444
3	15	45	0.417	1.251
4	7	28	0.194	0.776
5	2	10	0.056	0.280
	36	103	1	2.862

$h(x_i)$ …absolute Häufigkeit
$r(x_i)$ …relative Häufigkeit

$$\overline{x} = \frac{103}{36} = 2.86 \text{ “gewogenes arithmetisches Mittel”}$$

Die Noten haben verschiedenes “Gewicht”!

Definition 2. Wenn der Wert x_i mehrmals auftritt, verwendet man zur Berechnung des Mittelwerts die absolute Häufigkeit $h(x_i)$ oder die relative Häufigkeit $r(x_i)$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot h(x_1) + x_2 \cdot h(x_2) + \cdots + x_m \cdot h(x_m)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot h(x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot r(x_i)$$

Man nennt den auf diese Art berechneten Mittelwert **gewogenes arithmetisches Mittel**.

Beispiel 3. Bei vielen Meßdaten ermittelt man $\overline{x}$ durch Klassenbildung (Länge von Bäumen, Brenndauer von Gühlampen, Abmessungen von Werkstücken,...). Der Vorgang wird anhand von Höhenmessungen an Bäumen erklärt. Es wird die Höhe von 38 Bäumen nach einer bestimmten Zeit gemessen.

17.0	20.6	22.6	19.2	20.3	21.8	18.6	23.1	17.7	19.5
20.5	21.2	10.0	23.6	17.9	19.5	18.8	20.1	21.7	21.4
18.1	22.7	20.1	19.5	21.1	20.7	24.9	20.9	19.8	22.2
20.2	19.7	22.5	20.7	21.3	18.1	20.9	19.8		

Nach der Mittelwert-Formel ergibt sich $\overline{x} = 20.5$.
Die Werte liegen im Intervall $[17, 25]$. Dieser Bereich wird in gleiche Intervalle (Klassen) von einer bestimmten Breite (Klassenbreite) eingeteilt. Der Mittelpunkt einer Klasse heißt Klassenmitte.

Klasse	Klassenmitte x_i	$h(x_i)$	$x_i \cdot h(x_i)$	$r(x_i)$	$x_i \cdot r(x_i)$
[17,18[	17.5	3	52.5	0.079	1.383
[18,19[	18.5	4	74	0.105	1.943
[19,20[	19.5	8	156	0.210	4.095
[20,21[	20.5	10	205	0.263	5.392
[21,22[	21.5	6	129	0.158	3.397
[22,23[	22.5	4	90	0.105	2.363
[23,24[	23.5	2	47	0.053	1.246
[24,25[	24.5	1	24.5	0.026	0.637
		38	778		20.456

$$\overline{x} = \frac{778}{38} = 20.47$$

1.3 Weitere Mittelwerte und Begriffe

Median: Man ordnet die Listenwerte der Größe nach. Der Wert in der Mitte ist der Median. Bei gerader Anzahl von Listenwerten bildet man das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte.

Modus: Der am häufigsten in der Liste auftretende Wert heißt Modalwert oder Modus. (Eine Liste kann auch mehrere Modalwerte besitzen.)

Spannweite: Die Differenz zwischen dem größten Wert (Matimum) x_{max} und dem kleinsten Wert (Minimum) x_{min} der Liste heißt Spannweite R.

$$R = |x_{\text{max}} - x_{\text{min}}|$$

Halbweite: Sind q_1 und q_3 die Quartilen, dann wird

$$r = |q_3 - q_1|$$

Halbweite genannt.

1.4 Varianz und Standardabweichung in der Statistik

Definition 3. Bei der mittleren linearen Abweichung

$$e = \frac{|x_1 - \overline{x}| + \cdots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|$$

wird den Abweichungen aller Werte vom Mittelwert die gleiche Bedeutung beigemessen, unabhängig vom Ausmaß der Abweichung. Durch Quadrieren der Differenzen kann aber erreicht werden, dass das Streuungsmaß größere Abweichungen auch entsprechend stärker berücksichtigt als kleinere. Das so errechnete Streuungsmaß wird als **Varianz** (mittlere quadratische Abweichung) s^2 bezeichnet.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Definition 4. Die **Standardabweichung** (Streuung) s kann man als das wichtigste Streuungsmaß betrachten.

$$s = \sqrt{\frac{\text{Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert}}{\text{Anzahl der Stichprobenwerte}}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Satz 5 (Verschiebungssatz).

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x})^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum \left(x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \overline{x} + \overline{x}^2\right) = \\
&= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum x_i}_{\overline{x}} + \frac{1}{n} \cdot n \cdot \overline{x}^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x}^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \overline{x}^2 \left(= E(X^2) - \overline{x}^2\right)
\end{aligned}$$

Bei Meßserien können die Meßwerte mehr oder weniger weit vom Mittelwert entfernt liegen und trotzdem denselben Mittelwert ergeben.

Beispiel 4. Zwei Meßserien:
1. Serie: 1201, 1198, 1202, 1205, 1194 $\overline{x} = 1200$
2. Serie: 1190, 1212, 1197, 1188, 1213 $\overline{x} = 1200$
Die einzelnen Messungen weichen aber verschieden vom gemeinsamen Mittelwert ab:

1	-2	2	5	-6
-10	12	-3	-12	13

Zur Charakterisierung einer Meßreihe ist daher eine weitere Größe notwendig, die mittlere Abweichung von $\overline{x}$, die die Standardabweichung mißt.
Die Summe aller Abweichungen ergibt naturgemäß Null. Treffender wären die Absolutbeträge, mit denen aber umständlich zu rechnen ist. Man verwendet daher zur Messung dieser Streuung das Quadrat der Abweichung.
Zur Mittelbildung wird aus praktischen Gründen nicht durch n, sondern durch $n - 1$ dividiert (Streuung für einen Wert nicht möglich).

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

σ^2 ... Varianz oder Streuung
σ ... Standardabweichung
σ hat dieselbe Dimension wie $\overline{x}$, sodaß Messungen oft mit $\overline{x} \pm \sigma$ angegeben werden.
Für die obigen Meßserien ergeben sich die folgenden Varianzen:
1. Serie: $\sigma^2 = \frac{1}{4}(1 + 4 + 4 + 25 + 36) = \frac{70}{4} = 17.5$ bzw. $\sigma = 4.18$
2. Serie: $\sigma^2 = \frac{1}{4}(100 + 144 + 9 + 144 + 169) = \frac{566}{4} = 141.5$ bzw. $\sigma = 11.9$

Beispiel 5. σ und σ^2 bei Klassenbildung (Beispiel Baumhöhen):

$x_i - \overline{x}$	$h(x_i) \cdot (x_i - \overline{x})^2$
-2.97	26.463
-1.97	15.524
-0.97	7.528
0.03	0.010
1.03	6.366
2.03	16.484
3.03	18.362
4.03	16.241
	106.978

$$\sigma^2 = \frac{1}{37} \cdot 106.978 = 2.891$$
$$\sigma = 1.7$$

2 Kombinatorik

Beispiel Buch (Novak) S41

Definition 6. Fundamentale Produktregel:
Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ergibt sich als Produkt aus der Anzahl der Möglichkeiten, die bei jeder Entscheidung getroffen werden kann.

Beispiel 6 (S44,1). (a) über Fuerteventura + über Las Palmas, Teneriffa

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 3 = 15 \text{ Arten}$$

(b) Las Palmas, Teneriffa, Lanzarote, Fuerteventura oder
Las Palmas, Teneriffa, Lanzarote und zurück

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 54 + 81 = 135 \text{ Varianten}$$

2.1 Permutation ohne Wiederholung

Permutation ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente auf verschiedene Weise anzuordnen. Man kann auch von sortieren sprechen oder von einer bestimmten Reihenfolge der Elemente.

Definition 7. Ist M eine Menge von n verschiedenen Elementen, so heißt jede Anordnung dieser n Elemente eine Permutation ohne Wiederholung.

Anzahl:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(Sprich "n Faktorielle")

Beispiel 7. Schreibe alle Permutationen der Elemente a, b, c auf und berechne die Anzahl der Permutationen.

abc	bac	cab
acb	bca	cba

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Beispiel 8. Wie viele vierziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 3, 5, 7 bilden?

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Beispiel 9. Wie viele Sitzordnungen kann eine Familie aus sechs Mitgliedern bei Tisch einnehmen?

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ Sitzordnungen}$$

Beispiel 10 (S44,2). 11 Spieler 3

$$P_{11} = 11! = 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39916800 \text{ Möglichkeiten}$$

2.2 Permutation mit Wiederholung

Definition 8. Ist M eine Menge von n Elementen, bei denen Gruppen von r, s, t,... gleichen Elementen vorkommen, so heißt jede Anordnung dieser n Elemente eine Permutation mit Wiederholung.

Anzahl: $r + s + t + \cdots = n$

$$^{r,s,t,\ldots}P_n = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t! \cdot \ldots}$$

Beispiel 11. Schreibe alle Permutationen der Elemente a, a, b, c auf und berechne ihre Anzahl.

aabc	baac	caab
aacb	baca	caba
abac	bcaa	cbaa
abca	acab	acba

$$^{2}P_4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

Beispiel 12. Wie viele sechsziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 3, 3, 5, 5, 5 bilden?

$$^{2,3}P_6 = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

Beispiel 13 (S43). Auf wie viele verschiedene Arten können die Buchstaben des Wortes "AFFE" angeordnet werden?

$$^{2}P_4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 12$$

Beispiel 14. Auf wie viele verschiedene Arten können die Buchstaben des Wortes "BAR- 5
BARA" angeordnet werden? 6

$$^{2,3,2}P_7 = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{5040}{2 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{5040}{24} = 210$$

Beispiel 15 (S45,7b). 5 Waggons, 3 reine 2. Klasse Waggons 7a

$$^{3}P_5 = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Beispiel 16 (S45,8). bis 1967: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ 9
ab 1967: $3^6 = 729$

$$A = \frac{G \cdot p}{100}$$
$$p = \frac{A \cdot 100}{G}$$
$$p = \frac{729 \cdot 100}{64} \approx 1139\%$$

Die Anzahl der verschiedenen Autoschlüssel hat um 1039% zugenommen.

2.3 Variation ohne Wiederholung

(geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

Definition 9. Ist M eine Menge von n Elementen, so heißt jede Anordnung von k verschiedenen Elementen aus M eine Variation ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse k ($k \leq n$).

Anzahl:

$$^{k}V_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel 17. Schreibe alle Variationen ohne Wiederholung der Elemente a, b, c zur Klasse 2 auf und berechne ihre Anzahl.

ab	ac	bc
ba	ca	cb

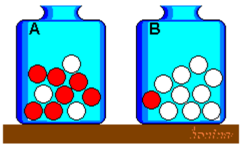
$^{2}V_3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 = 6$

Beispiel 18. Wie viele zweiziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden, wenn jede Ziffer nur einmal vorkommen darf? Schreibe alle auf!

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

$^{2}V_4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

Beispiel 19. Eine Urne enthält 7 Kugeln verschiedener Farbe. Zieht man nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen, so erhält man eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang 3. Wie viele Möglichkeiten gibt es?



$$^{3}V_7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Beispiel 20 (S48, 12). 8 Pferde: geordnet (es macht einen Unterschied, ob man auf Platz 1, 2 oder 3 ist), ohne zurücklegen (man kann nicht gleichzeitig 1. und 2. sein)

$$^{3}V_8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Beispiel 21 (S48, 15). 32 Sitzplätze, 36 Fahrgäste: geordnet, ohne zurücklegen 16

$$^{32}V_{36} = \frac{36!}{(36-32)!} = \frac{36!}{4!} \approx 1.54997 \cdot 10^{40}$$

2.4 Variation mit Wiederholung

(geordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

Wenn das gezogene k-te Element in die Menge der n Elemente zurückgelegt wird, spricht man von Wiederholung.

Definition 10. Ist M eine Menge von n Elementen, so heißt jede Anordnung von k nicht notwendig verschiedenen Elementen aus M eine Variation mit Wiederholung von n Elementen zur Klasse k.

Anzahl:

$$^{k}\overline{V}_n = n^k$$

Beispiel 22. Schreibe alle Variationen mit Wiederholung der Elemente a, b, c zur Klasse 2 auf und berechne ihre Anzahl.

aa	ab	ac	bb	bc	cc
–	ba	ca	–	cb	–

$$^{2}\overline{V}_3 = 3^2 = 9$$

Beispiel 23. Wie viele dreiziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1 und 2 bilden? Schreibe sie alle auf!

111	121	211	221
112	122	212	222

$$^{3}\overline{V}_2 = 2^3 = 8$$

Beispiel 24. Eine Urne enthält 5 Kugeln verschiedener Farbe. Zieht man nacheinander 3 Kugen mit Zurücklegen, so erhält man eine geordnete Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang 3. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$$^{3}\overline{V}_5 = 5^3 = 125$$

2.5 Kombination ohne Wiederholung

(Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

Wie viele k-elementige Teilmengen lassen sich aus einer n-elementigen Menge bilden?

Definition 11. Ist M eine Menge von n Elementen, so heißt jede Teilmenge von k verschiedenen Elementen aus M eine Kombination ohne Wiederholung von n Elementen zur Klasse k.

Anzahl:

$$^{k}K_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$ (Sprich: “n über k”) heißt **Binomialkoeffizient**, weil solche Werte beim Potenzieren von Binomen auftreten.

Beispiel 25. Schreibe alle Kombinationen ohne Wiederholung der Elemente a, b, c zur Klasse 2 auf und berechne ihre Anzahl.

ab ac bc $^{2}K_3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Beispiel 26. Acht Spieler bestreiten ein Schachturnier. Wie viele Spielpaarungen sind möglich?

$$^{2}K_8 = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = \frac{56}{2} = 28$$

Beispiel 27. Eine Urne enthält 7 Kugeln verschiedener Farbe. Zieht man mit einem Griff – also ohne Zurücklegen – 3 Kugeln, so erhält man eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang 3. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$$^{3}K_7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35$$

Beispiel 28 (S49, 17). 52 Karten 18

19

(a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Arten 20

(b) Reihenfolge unbedeutend

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960$$

2598960 verschiedene Blätter

Für den Binomialkoeffizienten gibt es einige Regeln, die das Rechnen vereinfachen:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweise:

1.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$$

2.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n}{1} = n$$
$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n}{1} = n$$

3.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

4.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} =$$
$$= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel 29. Ein Kreis wird durch 3 Punkte bestimmt, die nicht auf einer Geraden liegen. Es liegen 100 Punkte in einer Ebene. Wie viele Kreise sind durch die 100 Punkte bestimmt?

$$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3! \cdot 97!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 161700$$

2.6 Vermischte Aufgaben

Um festzustellen, welches kombinatorisches Problem vorliegt, kann folgendes Schema hilfreich sein:

In den gesuchten Anordnungen	Reihenfolge der Elemente von Bedeutung	Reihenfolge der Elemente nicht von Bedeutung
kommen alle Elemente vor	Permutationen	—
kommen nicht alle Elemente vor	Variationen	Kombinationen

Beispiel 30. Ein Sicherheitsschloß enthält 3 Ringe. Auf jedem Ring sind die 26 Buchstaben des Alphabets eingraviert. Wie viele Buchstabenanordnungen sind möglich?
Analyse des Problems: Jede Buchstabenanordnung besteht aus 3 Buchstaben.

(1) Es kommen also nicht alle Elemente vor.

(2) Die Reihenfolge der Buchstaben ist von Bedeutung.

(3) Da in den Buchstabenanordnungen auch gleiche Buchstaben auftreten können, handelt es sich um eine Variation mit Wiederholung.

$n = 26, k = 3$

$$^3\overline{V}_26 = 26^3 = 17576$$

Beispiel 31. Berechne und gib an, ob es sich um eine Permutation mit/ohne Wiederholung, Variation mit/Ohne Wiederholung oder um eine Kombination handelt.

(a) Wie viele „Wörter“, bestehend aus jeweils drei Buchstaben, lassen sich aus den Buchstaben A und B bilden?

AAA	BBA
AAB	BAB
ABA	ABB
BAA	BBB

$${}^{3}\overline{V}_2 = 2^3 = \underline{\underline{8}}$$

(b) Eine Schachtel enthält 10 verschiedene Zuckerl. Wie viele Möglichkeiten gibt es drei herauszunehmen?

$${}^{3}K_{10} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{120}}$$

(c) Wie viele Sitzordnungen können Yasmina, Stassy, Teresa, Anna und Alex auf ihren Plätzen einnehmen?

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{120}}$$

(d) Wie viele sechsziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 3, 3, 5, 5, 5 bilden?

$${}^{1,2,3}\overline{P}_6 = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{60}}$$

(e) Wie viele dreiziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden, wenn jede nur ein Mal vorkommen darf?

$${}^{3}V_5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\underline{60}}$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Einleitung

3.1.1 Fermat, Pascal und die Wahrscheinlichkeitstheorie

Auszug aus dem Buch “Fermats letzter Satz”:
Fermats Angewohnheit, ein Problem darzulegen, dessen Lösung jedoch für sich zu behalten, brachte ihm nicht nur die Befriedigung, seine Kollegen ärgern zu können, sondern hatte auch praktische Beweggründe. Erstens mußte er seine Zeit nicht damit verschwenden, seine Methoden ganz auszuformulieren, und konnte sich zügig an die nächste Eroberung machen. Zudem mußte er keine eifersüchtigen Mäkeleien über sich ergehen lassen. War ein Beweis einmal veröffentlicht, würden Hinz und Kunz, die auch nur ein wenig vom Thema verstanden, die einzelnen Schritte überprüfen und diskutieren. Auf das Drängen Blaise Pascals[1], einen Teil seiner Arbeiten zu veröffentlichen, antwortete der Eremit: “Was auch immer von meinem Werk man für publikationswürdig erachtet, ich möchte meinen Namen nicht darunter sehen.” Fermat verkörperte das verschwiegene Genie, das den Ruhm opferte, um nicht von den kleinkarierten Fragen seiner Kollegen belästigt zu werden.
Bei diesem Briefwechsel mit Pascal, dem einzigen neben Mersenne[2], mit dem er seine Ideen erörterte, ging es um die Schöpfung eines ganz neuen Zweigs der Mathematik - der Wahrscheinlichkeitstheorie. Pascal führte den mathematischen Eremiten in das Gebiet ein, weshalb Fermat sich trotz aller Rückzugsneigungen verpflichtet fühlte, seine Ideen zu diskutieren und den Dialog aufrechtzuerhalten. Gemeinsam entdeckten Fermat und Pascal die ersten Beweise und untermauerten die Wahrscheinlichkeitstheorie, die ja naturgemäß mit Ungewißheiten zu tun hat, mit einem Fundament aus Gewißheiten. Pascals Interesse an diesem Thema hatte ein Pariser Berufsspieler geweckt, Antoine Gombaud, Chevalier de Mere[3], dem bei dem Glücksspiel *Points* ein Problem aufgefallen war. Es ging darum, beim Würfeln Punkte zu erzielen, und wer zuerst eine bestimmte Punktzahl erlangte, war Gewinner und strich das Preis geld ein.
Gombaud war zusammen mit einem Kollegen mitten in einem solchen Spiel, als sie es wegen einer dringenden Verabredung unterbrechen mußten. So ergab sich das Problem, was sie mit dem Einsatz anfangen sollten. Die einfache Lösung wäre gewesen, den gan2en Betrag dem Spieler mit den meisten Punkten zu geben, doch Gombaud fragte Pascal, ob es eine fairere Möglichkeit gebe, das Geld aufzuteilen. Pascal stand also vor dem Problem, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der jeder Teilnehmer das Spiel gewinnen würde, wenn es mit gleichen Chancen für beide Teilnehmer fortgesetzt würde. Der Einsatz konnte dann entsprechend den berechneten Wahrscheinlichkeiten verteilt werden.
Schon vor dem siebzehnten Jahrhundert besaßen Berufsspieler aufgrund ihrer Erfahrung eine intuitive Vorstellung von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, doch Pascal eröffnete seinen Briefwechsel mit Fermat mit dem Ziel, die mathematischen Regeln zu entdecken, mit denen sich diese Gesetze genauer bestimmen lassen. Drei Jahrhunderte später bemerkte Bertrand Russell zu diesem scheinbaren Widerspruch in sich selbst: “Wie können wir nur von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit sprechen? Ist Wahrscheinlichkeit nicht

[1] Blaise Pascal (1623-1662) `http://www.blaise-pascal.de/`
[2] Marin Mersenne (1588-1648)
[3] Antoine Gombaud, Chevalier de Mere (1607-1684)

die Antithese zu jeglichem Gesetz?”
Die Franzosen gingen Gombauds Frage nach und erkannten bald, daß es sich um ein verhältnismäßig triviales Problem handelte, das gelöst werden konnte, wenn man alle möglichen Spielresultate und deren jeweilige Wahrscheinlichkeit genau bestimmte. Pascal und Fermat konnten Gombauds Problem unabhängig voneinander lösen. Dank der gemeinsamen Arbeit waren sie dabei recht schnell vorangekommen, und so nahmen sie sich vor, schwierigere und anspruchsvollere Fragen der Wahrscheinlichkeit auszuloten.
Wahrscheinlichkeitsprobleme sind gelegentlich umstritten, weil die mathematische Antwort, die wahre Antwort, häufig den intuitiven Schlüssen widerspricht. Daß die Intuition hier versagt, überrascht uns, denn man sollte meinen, im Überlebenskampf der Evolution sei ein Gehirn entstanden, dem die Lösung solcher Fragen ganz natürlich von der Hand geht. Stellen wir uns einmal vor, wie sich unsere Vorfahren auf der Jagd an einen jungen Hirsch heranschlichen und überlegten, ob sie nun angreifen sollten oder nicht. Wie hoch ist das Risiko, daß ein ausgewachsener Zwölfender in der Nähe darauf lauert, seinen Nachwuchs zu verteidigen und den Angreifer zu verletzen? Wie stehen andererseits die Chancen, daß sich bald eine bessere Gelegenheit bietet, ein Mahl aufzutreiben, wenn man die Lage jetzt als zu riskant einschätzt? Ein Talent dafür, Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen, sollte zu unserer genetischen Ausstattung gehören, und doch führt uns die Intuition häufig in die Irre.
Eines der am stärksten unserer Intuition widersprechenden Wahrscheinlichkeitsprobleme ist das der gemeinsamen Geburtstage. Nehmen wir ein Fußballfeld mit 23 Personen, den Spielern und dem Schiedsrichter. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben? Bei 23 Personen und 365 möglichen Geburtstagen ist es auf den ersten Blick unwahrscheinlich, daß zwei Geburtstage zusammenfallen. Die meisten werden bei dieser Frage vielleicbt auf höchstens 10 Prozent Wahrscheinlichkeit tippen. Tatsächlich liegt sie bei über 50 Prozent - das heißt, wenn es nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht, stehen die Chancen eher dafür als dagegen, daß zwei Personen in diesem Beispiel am gleichen Tag Geburtstag haben.
Dieser hohen Wahrscheinlichkeit liegt der Umstand zugrunde, daß es hier weniger um die Zahl der Personen geht als um die Zahl der Paarungsmöglichkeiten. Wenn wir nach gemeinsamen Geburtstagen suchen, müssen wir Paare und nicht Einzelpersonen ins Auge fassen. Zwar befinden sich 23 Menschen auf dem Feld, doch gibt es 253 mögliche Paare. So kann der erste mit jedem der 22 anderen ein Paar bilden, was schon einmal 22 Paarungen ergibt. Dann kann der zweite mit jeder der verbleibenden 21 Personen zusammengestellt werden (das Paar, das die erste mit der zweiten Person bildet, haben wir schon gezählt, so daß die Zahl der möglichen Paarungen jetzt um eins kleiner ist), wir erhalten also 21 weitere Paare. Schließlich kann der dritte mit den verbleibenden 20 Personen zusammengehen, und so weiter, bis wir insgesamt 253 Paare erhalten.
Die Behauptung, es sei zu mehr als 50 Prozent wahrscheinlich, daß bei einer Gruppe von 23 Menschen zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, widerstreitet unserer Intuition und ist doch mathematisch unwiderlegbar. Auf derlei sonderbare Wahrscheinlichkeiten stützen sich Buchmacher und Spieler, um den Arglosen Geld aus der Tasche zu ziehen. Wenn Sie das nächste Mal auf einer Party mit mehr als 23 Gästen sind, könnten Sie die Wette riskieren, daß zwei der Anwesenden am selben Tag Geburtstag haben. Beachten Sie, daß bei einer Gruppe von 23 Leuten die Wahrscheinlichkeit nur wenig mehr als 50 Prozent beträgt, jedoch rasch ansteigt, wenn die Zahl der Anwesenden wächst. Bei einer

Party mit 30 Gästen lohnt es sich daher immer zu wetten, daß zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben.
Fermat und Pascal deckten die Gesetzmäßigkeiten auf, die in allen Glücksspielen zum Tragen kommen und die sich Spieler für ausgeklügelte Spiel- und Wettstrategien zunutze machen können. Diese Wahrscheinlichkeitsgesetze finden auch in einer ganzen Reihe anderer Bereiche Anwendung, von der Börsenspekulation bis zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines atomaren Unfalls. Pascal war sogar davon überzeugt, mit seinen Theorien den Glauben an Gott rechtfertigen zu können. So behauptete er, die Begeisterung eines Spielers, der eine Wette eingeht, sei gleich dem Betrag, den er gewinnen könnte, mal der Wahrscheinlichkeit des Gewinns. Der mögliche Gewinn ewiger Glückseligkeit, so Pascal weiter, habe unendlichen Wert, und die Wahrscheinlichkeit, durch tugendhaftes Leben in den Himmel zu kommen, sei, wie gering auch immer, auf jeden Fall endlich groß. Deshalb ist die Religion, Pascals Definition zufolge, ein Spiel mit unendlich großer Begeisterung, das den Einsatz wert ist, denn die Multiplikation eines unendlichen Gewinns mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit ergibt einen unendlichen Wert.

3.1.2 Das Triell

Ein Triell[4] ist im wesentlichen ein Duell mit drei statt zwei Beteiligten. Eines Morgens beschließen Herr Schwarz, Herr Grau und Herr Weiß, einen Strei durch ein Pistolenduell zu beenden, bei dem am Ende nur einer überleben wird. Herr Schwarz ist der schlechteste Schütze, denn er trifft sein Ziel durchschnittlich nur einmal in drei Versuchen. Herr Grau schießt schon besser, bei drei Versuchen trifft er zweimal. Herr Weiß ist der beste Schütze, er trifft immer. Um das Triell fairer zu gestalten, darf Herr Schwarz als erster schießen, danach Herr Grau (wenn er noch lebt), dann Herr Weiß (wenn er noch lebt). Schließlich beginnt das Ganze von vorne, bis nur noch einer von ihnen am Leben ist. Die Frage lautet nun: “Wo sollte Herr Schwarz beim erstenmal hinzielen?” Maan kann sich hier auf die Intuition verlassen, besser jedoch auf die Spieltheorie.

Sehen wir uns die Optionen von Herrn Schwarz an. Herr Schwarz könnte zunächst auf Herrn Grau zielen. Wenn er erfolgreich ist, wird der nächste Schuß von Herrn Weiß abgefeuert. Weiß hat nur noch einen Gegner, Schwarz, und da Weiß ein perfekter Schütze ist, wird Schwarz ein toter Mann sein. Eine bessere Option für Schwarz ist, zunächst auf Weiß zu zielen. Wenn er ihn trifft, wird Grau den nächsten Schuß auf Schwarz abfeuern. Grau trifft sein Ziel nur in zwei von drei Fällen, und daher gibt es die Chance, daß Schwarz überlebt, auf Grau schießt und das TrieIl vielleicht gewinnt. Dem Anschein nach ist es die zweite Strategie, die sich Schwarz zueigen machen sollte. Allerdings gibt es eine dritte und noch bessere Option. Schwarz könnte in die Luft schießen. Grau hat den nächsten Schuß, und er wird auf Weiß zielen, denn dieser ist der gefährlichere Gegner. Wenn Weiß überlebt, wird er auf Grau zielen, weil er der gefährlichere Gegner ist. Indem Schwarz in die Luft schießt, ermöglicht er es Grau, Weiß auszuschalten oder umgekehrt. Dies ist die beste Strategie für Schwarz. Grau oder Weiß wird sterben, und dann wird Schwarz auf den Überlebenden anlegen. Schwarz hat die Situation so verändert, daß er nun nicht den ersten Schuß in einem TrieIl, sondern den ersten Schuß in einem Duell hat.

[4] Ebenfalls aus dem Buch “Fermats letzter Satz”

3.2 Grundbegriffe der Ereignisalgebra

Die Wahrscheinlichkeit kann man als Bruch oder als Prozentzahl angeben:

0%	50%	100%	Prozent
0	$\frac{1}{2}$	1	Bruch
unmögliches Ereignis		sicheres Ereignis	

Welches Ergebnis bei einem konkreten Versuch an einem konkreten Zufallsgerät (Würfel, Roulette,...) eintritt, kann man nicht mit Sicherheit sagen – dies hängt vom Zufall ab. Was man mit Sicherheit beschreiben kann, ist die sogenannte **Ergebnismenge** (oder Ergebnisraum) (Ω) des Experiments, d.h. die Menge aller bei diesem Experiment möglichen Versuchsergebnisse.

Beispiel 32. Verschiedene Ergebnismengen:

Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}$

Würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Geschlecht: $\Omega = \{M, W\}$

Geburtsgröße: $\Omega = [40; 60]$

Beim Betrachten von Zufallsexperimenten interessiert man sich dafür, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt. Ein Ereignis ist also eine Teilmenge der Ergebnismenge.

Beispiel 33. Wir würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_1 = gerade Zahl würfeln = $\{2, 4, 6\}$

E_2 = eine Zahl > 4 würfeln = $\{5, 6\}$

E_3 = die Zahl 6 würfeln = $\{6\}$

E_4 = eine Zahl > 7 würfeln = $\{\}$

E_5 = eine Zahl < 7 würfeln = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

Die Ereignisse sind Teilmengen der Ergebnismenge Ω. E_4 ist ein **unmögliches Ereignis**: Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist Null:

$$P(E_4) = 0$$

(Anm.: Der Buchstabe P kommt vom englischen Wort “Probability” und heißt übersetzt “Wahrscheinlichkeit”.)
E_5 ist das **sichere Ereignis**:

$$P(E_5) = 1 \text{ oder } 100\%$$

Wenn Ω n Elemente besitzt, dann gibt es 2^n Teilmengen (oder 2^n Ereignisse).
Vom Ereignis E_1 “eine gerade Zahl würfeln” heißt das **Gegenereignis** E_1' (nicht E_1) “eine ungerade Zahl würfeln”.

$E_1 = \{2, 4, 6\}$

$E_1' = \{1, 3, 5\} = \Omega \backslash E_1$

$E_1 \cup E_1' = \Omega$

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Nach den möglichen Ausgängen eines Experiments unterscheidet man:

Bernoulli-Experiment: Es sind nur **zwei** Ergebnisse möglich. Z.B. beim Werfen einer Münze: $\Omega = \{K; Z\}$
Auch das Werfen eines Reißnagels ist ein Bernoulli-Experiment mit den Ausgängen Spitze oben bzw. Spitze unten (schräg). Zunächst könnte man annehmen, dass beide Ausgänge gleich wahrscheinlich sind, doch zeigt die statistische Auswertung einer größeren Versuchsreihe, dass auf jeweils 100 Würfe 73 mal "Spitze unten" als Ergebnis und nur 27 mal "Spitze oben" als Ergebnis kommt.

Laplace-Experiment: Bei einem Laplace-Experiment müssen alle möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** sein, wobei es auf die Anzahl der möglichen Ausgänge nicht ankommt.
Das zugehörige Zufallsgerät heißt Laplace-Gerät.
Wenn man n Ausgänge des Experiments annimmt ($n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$) und jeder Ausgang gleich wahrscheinlich sein muss, so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens jedes einzelnen Ereignisses $\frac{1}{n}$.

Experiment: Vorgang, der unter wohldefinierten Anfangsbedingungen beliebig oft wiederholbar ist.
Beispiel: Werfen einer Münze, Werfen eines Würfels, Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel, Ziehen einer Kugel aus einer Urne.

Ergebnis: Jeder Ausgang eines Experiments.
Beispiel: Beim Werfen einer Münze kann Zahl oder Wappen erscheinen. Beim Werfen eines Würfels können die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 erscheinen.

Ergebnismenge Ω: Gesamtheit aller möglichen interessierenden Ergebnisse eines Experiments.
Beispiel: Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; Werfen zweier Münzen: $\Omega = \{ZZ, ZW, WZ, WW\}$

Ereignis E: Jede Teilmenge der Ergebnismenge.
Beispiel: Beim Werfen zweier Münzen sollen verschiedene Seiten der Münzen geworfen werden: $E = \{ZW, WZ\}$

Elementarereignis: Jede einelementige Teilmenge der Ergebnismenge.
Beispiel: Beim Werfen eines Würfels sind $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, $E_3 = \{3\}$, $E_4 = \{4\}$, $E_5 = \{5\}$, $E_6 = \{6\}$, die Elementarereignisse.

Sicheres Ereignis: Es tritt immer ein: $E = \Omega$.
Beispiel: Beim Werfen eines Würfels wird sicher eine Ziffer < 7 erscheinen.

Unmögliches Ereignis: Es tritt nie ein: $E = \{\}$.
Beispiel: Beim Werfen eines Würfels die Augenzahl 7 zu werfen ist unmöglich.

Gegenereignis E': Ereignisse, welche in bezug auf die Ergebnismenge Ω komplementär sind, heißen Gegenereignisse.

$$E' = \Omega \backslash E, E \cap E' = \Omega, E \cup E' = \{\}$$

Beispiel: Beim Werfen zweier Münzen zwei gleiche Seiten zu weren ist das Gegenereignis dazu, dass verschiedene Seiten geworfen werden: $E = \{ZZ, WW\}$, $E' = \{ZW, WZ\}$

3.3 Begriff der Wahrscheinlichkeit

Was ist Wahrscheinlichkeit? Ein Maß für die Erwartung bei einer „zufälligen“ Auswahl ein Element einer gewissen Teilmenge zu erhalten nennt man Wahrscheinlichkeit.

Definition 12 (Statistische Wahrscheinlichkeit:). Die relative Häufigkeit (siehe Seite 5) r(E) eines Ereignisses E ist ein Näherungswert für die Wahrscheinlichkeits P(E). Dieser Näherungswert ist umso zuverlässiger, je größer der Umfang der Stichprobe ist.

$$r(E) \approx P(E)$$

Beispiel 34. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel einen “Zweier” zu würfeln?
Wenn wir davon ausgehen, dass es sich um einen “fairen” Würfel handelt, gibt es 6 Möglichkeiten, die alle gleich wahrscheinlich sind.

$$r(2) \approx \frac{1}{6} = P(E)$$

Anm.: Die relative Häufigkeit lässt sich aus einer tatsächlich durchgeführten Stichprobe ermitteln, während die Wahrscheinlichkeit eine Voraussage auf eine noch durchzuführende Stichprobe macht.

Definition 13 (LAPLACEsche Wahrscheinlichkeitsregel:). Lässt sich die Ergebnismenge Ω in m Elementarereignisse zerlegen, die alle gleichwahrscheinlichk sind, so ist die Wahrscheinlichkeit P(E) für das Eintreten des Ereignisses E gegeben durch:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl aller Ergebnisse, bei denen das Ereignis E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Beispiel 35. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Werfen eines „idealen“ Würfels die Augenzahl gerade ist.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$E = \{2, 4, 6\}$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 36 (S52,22ab). 23

Beispiel 37 (S53,24). 25

Beispiel 38 (S53,26).

Definition 14 (Axiomatische W.definition von KOLMOGOROFF). Unter Wahrscheinlichkeit verstehen wir eine Funktion P, welche (möglichst) jeder Teilmenge $A \subset \Omega$ (d.h. jedem Ereignis, das als Menge betrachtet wird) eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet.
Die Funktion soll folgende Eigenschaften haben:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ und
$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cup B = \{\}$

3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 15. Es seien A und B zwei Ereignisse aus einer Ergebnismenge Ω.
Unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A unter der Voraussetzung (unter der Bedingung), [wenn man weiß], dass das Ereignis B eingetroffen ist.

Beispiel 39. Bei der Volkszählung im Jahre 1981 erhielt man für die Anzahl der Österreicher unter 20 Jahren und über 20 Jahren folgende Ergebnisse:

	Unter 20 J.	Über 20 J.	Insgesamt
Frauen	1057605	2917517	3975122
Männer	1107788	2472428	3580216
Insgesamt	2165393	5389945	7555338

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person (a) weiblich ist? (b) unter 20 Jahren ist? (c) unter 20 Jahre und weiblich ist? (d) über 20 Jahre ist oder männlich? (e) die unter 20 Jahre alt ist, weiblich ist? (f) die über 20 Jahre alt ist, weiblich ist?

A . . . Ereignis „weiblich zu sein“
B . . . Ereignis „unter 20 Jahre zu sein“

(a) $P(A) = \frac{3975122}{7555338} \approx 52,6\%$

(b) $P(B) = \frac{2165393}{7555338} \approx 28,7\%$

(c) $P(A \cap B) = \frac{1057605}{7555338} \approx 14\%$

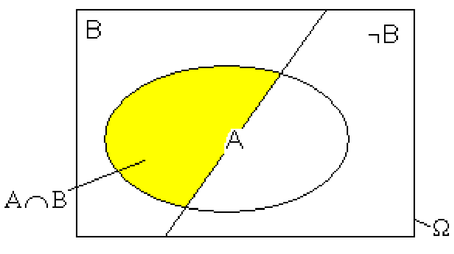
(d) $1 - P(A \cap B) \approx 1 - 0,14 = 86\%$

(e) $P(A|B) = \frac{1057605}{2165393} \approx 48,84\%$

(f) $P(A|\neg B) = \frac{2917517}{5389945} \approx 54,13\%$

Versuche mit eigenen Worten auszudrücken, was in den Aufgaben (e) bzw. (f) berechnet wurde und gib an, was allgemein mit der Schreibweise $P(A|B)$ gemeint ist. (Es wird nicht die relative Häufigkeit an der Gesamtheit, sondern an einem Teil der Gesamtheit, bei dem schon ein gewisses Ereignis eingetreten ist, berechnet. Mit der Schreibweise ist gemeint: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A bereits eingetreten ist . . . bedingte Wahrscheinlichkeit)

Veranschaulichung durch ein Mengendiagramm:



$A \cap B$ . . . Frauen unter 20
$A \cap \neg B$ . . . Frauen über 20
$B \setminus A$ . . . Männer unter 20
$\neg B \setminus A$ . . . Männer über 20
$P(A \cap B)$ . . . Prozentsatz von $A \cap B$ bezogen auf Ω
$P(A|B)$ . . . Prozentsatz von $A \cap B$ bezogen auf B $\Rightarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Anhand des gegebenen Beispiels lässt sich dies auch nachvollziehen:

$$\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1057605}{7555338}}{\frac{2165393}{7555338}}=\frac{1057605}{2165393}=P\left(A|B\right)$$

Es erscheint also folgende Definition als sinnvoll:

Definition 16. Die reelle Zahl

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Hypothese B.

Beispiel 40. In einer Stichprobe von 10000 Personen hat man unter anderem auch die Merkmale Augenfarbe und Geschlecht erhoben. Besteht zwischen den beiden ein Zusammenhang?

	Geschlecht		
Augenfarbe	männlich	weiblich	$\sum$
blau	1425	1075	2500
anders	4275	3225	7500
$\sum$	5700	4300	10000

Hier können die relativen Häufigkeiten leicht als Wahrscheinlichkeiten gedeutet werden:

Die "absolute" Wahrscheinlichkeit ... $P(\text{blauäugig}) = \frac{2500}{10000} = 0.25$,

das ist der Anteil der Blauäugigen in Ω. (Ω besteht aus 10000 Probanden.)

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ... $P(\text{blauäugig}|\text{weiblich}) = \frac{1075}{4300} = 0.25$,

das ist der Anteil der Blauäugigen unter den Frauen.
Offenbar gilt:

Anteil der Blauäugigen insgesamt = Anteil der Blauäugigen unter den Frauen.

Hier wird man also sagen, dass die Ereignisse "blauäugig zu sein" und "weiblich zu sein" unabhängig sind.
Wäre z.B. $P(\text{blauäugig}|\text{weiblich})$ sehr viel größer als $P(\text{blauäugig})$, so würde man wohl vermuten, dass die Eigenschaft "weiblich" die Eigenschaft "baluäugig" begünstigt, dass also zwischen diesen Eigenschaften eine Abhängigkeit besteht.

Es ist daher zweckmäßig zu definieren:

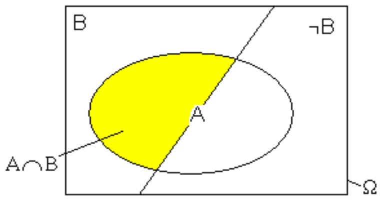
Definition 17. Ein Ereignis A heißt unabhängig von einem Ereignis B, wenn gilt:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$$

D.h. die Aussage, dass Ereignis A bzw. B schon eingetreten ist, ändert nichts!

3.4.1 Folgerungen aus der Definition

Im Volkszählungsbeispiel war A das Ereignis „weiblich zu sein“ und B das Ereignis „unter 20 Jahre zu sein“. Weiters war $P(A|B) = 48,84\%$ und $P(B) = 28,7\%$. Wie ließe sich daraus die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass eine zufällig gewählte Person unter 20 Jahre und weiblich ist?



Aus dem Mengendiagramm erkennt, man:
$P(A \cap B)$ ... Prozentsatz von $A \cap B$ bezogen auf Ω
$P(A|B)$ ... Prozentsatz von $A \cap B$ bezogen auf B

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$P(B)$ ... Prozentsatz von B bezogen auf Ω

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$P(A|B)$ bezogen auf Ω ist somit das $\frac{|A \cap B|}{|B|}$fache des Anteils von B in Ω $\Rightarrow$

Satz 18 (Multiplikationssatz). („sowohl als auch“-Ereignisse)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Bemerkungen:

- Den Multiplikationssatz erhält man auch durch formale Umformung aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.
- Sind A und B unabhängige Ereignisse gilt bekanntlich $P(A|B) = P(A)$ und somit $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Beispiel 41. Eine Werbeagentur wird mit der Einführung eines neuen Produktes beauftragt. Sie entwirft ein Werbekonzept (erarbeitet Zielgruppen, Art der einzusetzenden Mittel wie Werbespots etc.). Die Firmenleitung lässt die Arbeit der Agentur nach einem Jahr von einem Meinungsforschungsinstitut überprüfen. Dessen Erhebungen sind in der folgenden Tabelle dargestellt. Dabei bedeutet
A ... Personen wurden von der Werbung erreicht (Werbespot gesehen, Prospekt erhalten, etc.)
B ... Personen kaufen das anzupreisende Produkt

	A	¬A
B	6%	14%
¬B	24%	56%

Ist es sinnvoll, weiter in diese Werbekampagne zu investieren?

Kann man zeigen, dass die beiden Ereignisse A und B voneinander unabhängig sind, wirkt sich die Werbung auf das Konsumverhalten der Konsumenten offenbar nicht aus und ist damit wertlos.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,3 \\ P(B) &= 0,2 \\ P(A \cap B) &= 0,06 \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch unabhängig
$\Rightarrow$ der Agentur wird der Auftrag entzogen.

Da $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ gilt, folgt weiters der

Satz 19 (Einfaches BAYESsches Theorem).

$$P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$$

Dieser Satzes dient der formalen Umkehr der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wie das folgende Beispiel zeigt, lässt sich damit von der „Wirkung“ auf die „Ursache“ schließen.

Beispiel 42. Die Multiple Sklerose (MS), eine schreckliche Krankheit, ist nicht heilbar. Die einzige Chance der Medizin besteht darin, ihren Verlauf möglichst zu hemmen, zu verlangsamen. Daher ist es notwendig, sie schon in einem möglichst frühen Stadium zu erkennen, um Gegenmaßnahmen treffen zu können. Eines ihrer ersten Symptome scheint eine Sehnerventzündung (SN) zu sein. Das Problem lautet nun: Soll ein an SN Erkrankter gegen MS behandelt werden (eine solche Behandlung kann auch unerwünschte Nebenwirkungen zeigen), oder verlässt sich der behandelnde Arzt besser darauf, dass diese SN nicht das ersten Symptom einer MS ist, sondern eigene Ursachen hat (Erkältung, Stress, etc.)? Aus einer Gesundheitsstatistik ergaben sich folgende (hier angenommene) Werte:

$P(MS) = 0.12$	Wahrscheinlichkeit an MS zu erkranken. (Stadium in dem MS mit Sicherheit diagnostiziert werden kann)
$P(SN) = 0.07$	Wahrscheinlichkeit, an SN zu erkranken.
$P(SN\|MS) = 0.55$	bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein an MS Erkrankter früher SN hatte.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein SN Erkrankter auch an MS erkranken wird:

$$P\left(MS|SN\right) = P\left(SN|MS\right) \cdot \frac{P\left(MS\right)}{P\left(SN\right)} = \frac{0.55 \cdot 0.12}{0.07} = 0.94 = 94\%$$

3.4.2 Summen von Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 43. Jemand gewinnt eine Wette, wenn er mit einem Würfel eine gerade Zahl oder eine Zahl ≥ 4 würfelt.

$$P(\text{Wette gewonnen}) = P(\text{gerade Zahl}) + P(\text{Zahl} \geq 4) = 0.5 + 0.5 = 1$$

Kann das stimmen? Wenn nein, warum nicht? Wie lautet die richtige Gewinnwahrscheinlichkeit?
Da die Ereignisse $\{2, 4, 5, 6\}$ die günstigen Ereignisse darstellen erhält man die korrekte Gewinnwahrscheinlichkeit durch:

$$P\left(\text{Gewinn}\right) = \frac{4}{6} = 0.\dot{6} = 66.67\%$$

In der falschen Rechnung wurden die Ereignisse 4 und 6 doppelt gezählt. Eine entsprechende Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A oder B eintritt wäre somit

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$$

Bemerkung: Können A und B nicht gleichzeitig auftreten (also A und B sind unvereinbar), gilt $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$
ACHTUNG: unvereinbar $\neq$ unabhängig!

3.4.3 Die „volle“ BAYESsche Formel

Beispiel 44. Ein Zollhund, der auf Rauschgift abgerichtet ist, soll jedes mal bellen, wenn er Rauschgift riecht. Wird er bei der Zollkontrolle eines Reisenden eingesetzt, so weiß man, dass er mit 95%-iger Sicherheit bellt, falls dieser Rauschgift mit sich führt. Allerdings bellt er erfahrungsgemäß auch in 5% der Fälle, in denen kein Rauschgift geschmuggelt wird. Schließlich ist noch bekannt, dass etwa einer von 1000 Reisenden Rauschgift bei sich hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Kontrolle eines Reisenden der Hund bellt?

A ... Ereignis „Hund bellt“
B ... Ereignis „Reisender schmuggelt“

$$\begin{aligned} P(B) &= 0.001 \\ P(A|B) &= 0.95 \\ P(A|\neg B) &= 0.05 \\ A &= (A \cap B) \cup (A \cap \neg B) \\ \Rightarrow P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \neg B), \end{aligned}$$

da die beiden Ereignisse einander ausschließen. $\Rightarrow$

Satz 20 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit).

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\neg B) \cdot P(\neg B)$$

Für unser Beispiel heißt das:

$$P(A) = 0.95 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot (1 - 0.001) = 0.0509 = 5.09\%$$

Zusatzfrage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Reisender, bei dessen Kontrolle der Hund bellt, tatsächlich Rauschgift schmuggelt?

Gesucht ist $P(B|A)$. Verwendet man die einfache BAYESsche Formel

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

und den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, so erhält man die sogenannte

Satz 21 (Volle BAYESsche Formel).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\neg B) \cdot P(\neg B)}$$

Daraus folgt für unser Beispiel:

$$P\left(B|A\right) = \frac{0.95 \cdot 0.001}{0.0509} = 0.0187$$

Beispiel 45. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass aus allen Schülern einer Schule, einer ausgewählt wird, der in die 7B geht.

$$P(7B) = \frac{|7B|}{|\Omega|}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Schüler aus der 7B ist, wenn ein Mädchen gewählt wird.

$$P(7B|M) = \frac{|7B \cap M|}{|M|} \qquad \text{bedingte Wahrscheinlichkeit}$$

Beispiel 46 (Szirusek Bsp.624). Ein Verein hat 240 Mitglieder. Eine Befragung ergab die folgende Tabelle:

	Frauen	Männer	
treiben Sport	35	82	117
treiben keinen Sport	64	59	123
	99	141	240

Ein Mitglied wird zufällig ausgewählt. Wir bezeichnen das Ereignis "Sportler gewählt" mit S. Dann gilt:

$$P(S) = \frac{117}{240} \approx 48.75\%$$

Die Wahrscheinlichkeite, einen Sportler auszuwählen, beträgt 49%.
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, wenn man schon weiß, dass der Ausgewählte ein Mann ist? Für diese Wahrscheinlichkeit gilt offenbar:

$$P(S|M) = \frac{82}{141} \approx 58.16\%$$

weil 82 der 141 Männer Sport betreiben. Der Wert der Wahrscheinlichkeit hat sich aufgrund der Zusatzinformation "Mann" geändert. Es liegt hier eine **bedingte Wahrscheinlichkeit** vor, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses S unter der Bedingung des Ereignisses M ("Mann"); anders ausgedrückt: die Wahrscheinlichkeit von S, wenn man weiß, dass M eingetreten ist.
Wir bestimmen $P(S|F)$; dabei bedeutet F das Ereignis "Frau":

$$P(S|F) = \frac{35}{99} \approx 35.35\%$$

Wemm man weiß, dass eine Frau ausgewählt wurde, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für S nur 35%.
Umgekehrt kann man auch nach der Wahrscheinlichkeit $P(F|S)$ fragen, d.h. nach der Wahrscheinlichkeit eine Frau zu wählen, wenn man weiß, dass ein Sportler gewählt wurde:

$$P(F|S) = \frac{35}{117} \approx 30\%.$$

(Es sind 30% der Sportler eben Frauen.)

Beispiel 47. In einem Studentenheim wohnen 100 Studentinnen. Wir betrachten hier die Heimbewohnerinnen bezüglich der Merkmale Haarfarbe und Pünktlichkeit bei Verabredungen und stellen folgende Häufigkeitsverteilung fest:

	B	S	R	$\sum$
P	35	5	0	40
U	40	15	5	60
$\sum$	75	20	5	100

P. . . pünktlich
U. . . unpünktlich
B. . . blond oder brünett
S. . . schwarzhaarig
R. . . rothaarig

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse B, S, R, P und U bei zufälliger Auswahl einer Heimbewohnerin?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse $P \cap B$, $P \cap S$, $P \cap R$, $U \cap B$, $U \cap S$ und $U \cap R$?

(c) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) ein Mädchen blond ist, wenn man weiß, dass es pünktlich ist; (bezogen auf die Pünktlichkeit);

(2) es pünktlich ist, wenn man weiß, dass es blond oder brünett ist; (bezogen also auf die Blonden und Brünetten);

(3) ein Mädchen unpünktlich ist, wenn es schwarzhaarig ist; (bezogen auf die Schwarzhaarigen)

(4) ein Mädchen pünktlich ist, wenn man weiß, dass es nicht rothaarig ist; (bezogen auf die Nicht-Rothaarigen)?

Beispiel 48. Es wird gewürfelt. Berechne:

1. P(Es kommt 6 | Es kommt eine gerade Zahl)
2. P(Es kommt eine gerade Zahl | Es kommt 6)
3. P(Es kommt 6 | Es kommt eine ungerade Zahl)
4. P(Es kommt eine Zahl < 4 | Es kommt eine gerade Zahl)

Beispiel 49. In einem Gefängnis befinden sich Insassen gemäß der untenstehenden Tabelle. Ein Insasse wird zufällig ausgewählt und begnadigt.

	Insasse beging leichtes Vergehen (L)	Insasse beging schweres Vergehen (S)	Gesamt
Männlich (M)	82	113	195
Weiblich (W)	47	26	73
$\sum$	129	139	268

(a) Berechne $P(L)$, $P(S)$, $P(S|M)$, $P(S|W)$!

(b) Begünstigt das Ereignis M das Ereignis S?

(c) Begünstigt das Ereignis W das Ereignis L?

Beispiel 47. In einem Studentenheim wohnen 100 Studentinnen. Wir betrachten hier die Heimbewohnerinnen bezüglich der Merkmale Haarfarbe und Pünktlichkeit bei Verabredungen und stellen folgende Häufigkeitsverteilung fest:

	B	S	R	$\sum$
P	35	5	0	40
U	40	15	5	60
$\sum$	75	20	5	100

P. . . pünktlich
U. . . unpünktlich
B. . . blond oder brünett
S. . . schwarzhaarig
R. . . rothaarig

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse B, S, R, P und U bei zufälliger Auswahl einer Heimbewohnerin?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse $P \cap B$, $P \cap S$, $P \cap R$, $U \cap B$, $U \cap S$ und $U \cap R$?

(c) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass

  (1) ein Mädchen blond ist, wenn man weiß, dass es pünktlich ist; (bezogen auf die Pünktlichkeit);

  (2) es pünktlich ist, wenn man weiß, dass es blond oder brünett ist; (bezogen also auf die Blonden und Brünetten);

  (3) ein Mädchen unpünktlich ist, wenn es schwarzhaarig ist; (bezogen auf die Schwarzhaarigen)

  (4) ein Mädchen pünktlich ist, wenn man weiß, dass es nicht rothaarig ist; (bezogen auf die Nicht-Rothaarigen)?

LÖSUNG:

(a) $P(B) = 0.75$, $P(S) = 0.20$, $P(R) = 0.05$,
$P(P) = 0.40$, $P(U) = 0.60$

(b) $P(P \cap B) = 0.35$, $P(P \cap S) = 0.05$, $P(P \cap R) = 0$,
$P(U \cap B) = 0.40$, $P(U \cap S) = 0.15$, $P(U \cap R) = 0.05$

(c) (1) $P(B|P) = \frac{35}{40} = 0.875$

  (2) $P(P|B) = \frac{35}{75} \approx 0.467$

  (3) $P(U|S) = \frac{15}{20} = 0.75$

  (4) $P(P|\neg R) = \frac{40}{95} \approx 0.421$

Beispiel 48. Es wird gewürfelt. Berechne:

1. P(Es kommt 6 | Es kommt eine gerade Zahl)
2. P(Es kommt eine gerade Zahl | Es kommt 6)
3. P(Es kommt 6 | Es kommt eine ungerade Zahl)
4. P(Es kommt eine Zahl < 4 | Es kommt eine gerade Zahl)

LÖSUNG: $|\Omega| = 6$

1. P(Es kommt 6 | Es kommt eine gerade Zahl) = $\frac{1}{3} = 33.33\%$
2. P(Es kommt eine gerade Zahl | Es kommt 6) = $\frac{1}{1} = 100\%$
3. P(Es kommt 6 | Es kommt eine ungerade Zahl) = 0%
4. P(Es kommt eine Zahl < 4 | Es kommt eine gerade Zahl) = $\frac{1}{3} = 33.33\%$

Beispiel 49. In einem Gefängnis befinden sich Insassen gemäß der untenstehenden Tabelle. Ein Insasse wird zufällig ausgewählt und begnadigt.

	Insasse beging leichtes Vergehen (L)	Insasse beging schweres Vergehen (S)	Gesamt
Männlich (M)	82	113	195
Weiblich (W)	47	26	73
$\sum$	129	139	268

(a) Berechne $P(L)$, $P(S)$, $P(S|M)$, $P(S|W)$!

(b) Begünstigt das Ereignis M das Ereignis S?

(c) Begünstigt das Ereignis W das Ereignis L?

LÖSUNG:

(a) $P(L) = \frac{129}{268} \approx 48.13\%$,
$P(S) = \frac{139}{268} \approx 51.87\%$,
$P(S|M) = \frac{113}{195} \approx 57.95\%$,
$P(S|W) = \frac{26}{73} \approx 35.62\%$

(b) ja

(c) $P(L|W) = \frac{47}{73} \approx 64.38\% \Rightarrow$ ja!

3.5 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

3.5.1 Die Additionsregel

Definition 22. Für die Wahrscheinlichkeit, dass „das Ereignis A eintritt oder das Ereignis B eintritt“, gilt die Additionsregel:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wenn A und B einander ausschließen, dann gilt wegen $A \cap B = \{\}$:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Die Additionsregel wird oft auch unbewußt angewendet.

Beispiel 50. In einer Urne befinden sich 5 weiße und 7 rote Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit entweder 2 weiße Kugeln oder 2 rote Kugeln zu ziehen, wenn 2 Kugeln gleichzeitig (also mit einem Griff) gezogen werden?

$P(WW) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$
$P(RR) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

$$P(WW \text{ oder } RR) = P(WW \cap RR) = \frac{5}{33} + \frac{7}{22} = \frac{31}{66} \approx 46.97\%$$

Beispiel 51. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln entweder einen Pasch (= gleiche Augenzahl) oder die Augensumme 10 zu werfen?

A ... Pasch, B ... Augenzahl 10
$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
$P(A \cup B) = \frac{1}{36}$ (Zwei 5er sind sowohl ein Pasch, als auch Augensumme 10!)

$$P(A \text{ oder } B) = P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{2}{9} \approx 22.22\%$$

3.5.2 Die Multiplikationsregel

Definition 23. Für die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt, gilt die Multiplikationsregel:

$$P(A \text{ und } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Beispiel 52. Eine Urne enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Unter Laplace-Annahme werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Kugel weiß und die zweite schwarz?
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 "erste Kugel ist weiß" ist $\frac{3}{5}$.

$$P(E_1) = \frac{3}{5}$$

In $\frac{3}{5}$ aller Fälle wird E_1 eintreten.
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E_2 "zweite Kugel ist schwarz" eintritt, wenn E_1 schon eingetreten ist, beträgt $\frac{2}{4}$.

$$P(E_2|E_1) = \frac{2}{4}$$

In $\frac{2}{4}$ der $\frac{3}{5}$ aller Fälle, in denen E_1 eintritt, tritt auch E_2 ein.
$\frac{2}{4}$ von $\frac{3}{5}$ sind aber $\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß und die zweite Kugel schwarz ist, beträgt $\frac{3}{10}$.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$\Longrightarrow$ Übungen zur Kombinatorik (Laplace) – UZLaplace
$\Longrightarrow$ Übungen zur Kombinatorik – UZKombinatorik

4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

4.1 Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsfunktion

4.1.1 Zufallsvariable (=Zufallsgröße)

Einführungsbeispiele:

> Bei einem Würfelspiel wird beim zweifachen Wurf eines Würfels das Augenprodukt bestimmt. Das Ergebnis $(4|2)$ hat das Produkt 8, das Ergebnis $(3|5)$ das Produkt 15. Jedem Ergebnis wird auf diese Art eine reelle Zahl zugeordnet.
>
> Ein Spieler wirft eine Münze dreimal. Er muß 1 € Einsatz an die „Bank" leisten und gewinnt 1 €, wenn er dreimal Zahl wirft. Er gewinnt 0.50 €, wenn er genau zweimal Zahl wirft. Wirft er dreimal Wappen, gewinnt er 0.80 €. In allen anderen Fällen gewinnt er nichts, er verliert seinen Einsatz. Es gibt also vier mögliche Gewinne: 1 €, 0.80 €, 0.50 € und -1 €.

In beiden Beispielen können wir jedem Ausgang eine reelle Zahl zuordnen. Welche Zahl nun im einzelnen Experiment eintritt, hängt vom Zufall ab. Wir nennen die zugeordnete Zahl deshalb Zufallsgröße. Nun ist diese Größe aber für die Wahrscheinlichkeitsrechnung weniger interessant als die Wahrscheinlichkeit, mit der sie eintritt. Wir werden den Zufallsgrößen noch Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Dadurch sind die Zufallsgrößen einmal Bilder einer Abbildung[5], andererseits Urbilder[6] einer anderen Zuordnung. Sie definieren selbst eine Zuordnung vom Ergebnisraum zu den Wahrscheinlichkeiten. Deshalb benutzt man auch den Ausdruck Zufallsvariable für die Zufallsgrößen.

Definition 24. Eine Zufallsvariable (ZV) X ist eine Funktion, welche Ereignissen, die vom Zufall abhängen, jeweils genau eine reelle Zahl zuordnet.
Schreibweise: $X = k$ (analog zu $f(x) = y$).
Die Wahrscheinlichkeit, mit der sie ihre Werte k jeweils annimmt, nennt man die Verteilung der Zufallsvariablen.

Man unterscheidet:

Diskrete Zufallsvariable: Die Variable X nimmt nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte an. (Konfektionsgröße, Preis einer Ware, …)

Kontinuierliche (stetige) Zufallsvariable: Die Variable X nimmt alle Werte eines bestimmten Intervalls an. (Körpergewicht eines Menschen, Geschwindigkeit eines Flugzeuges, …)

Die Zufallsvariable X nimmt bei einem bestimmten Experiment jeden Variablenwert k mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit an.

Satz 25. Eine Zufallsvariable X heißt gleichverteilt, wenn jeder Wert, den sie überhaupt annehmen kann, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit angenommen wird.

---

[5] Bilder; Abbildung –> siehe 5. Klasse!
[6] Urbilder –> siehe 5. Klasse

4.1.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Ganz allgemein versteht man unter einer Zufallsvariablen X eine Größe, die – vom Zufall gesteuert – reelle Zahlen k als Werte annimmt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der sie ihre Werte k jeweils annimmt, nennt man die Verteilung der Zufallsvariablen. Je nachdem, ob X höchstens abzählbar (unendlich) viele („diskret“ liegende) Zahlen k annehmen kann oder alle Zahlen eines bestimmten Intervalls, spricht man von einer diskreten bzw. einer kontinuierlichen zufallsvariablen und einer diskreten Verteilung bzw. kontinuierlichen Verteilung der Zufallsvariablen.

Definition 26. Eine Funktion P, die jedem Elementarereignis E_1, E_2,..., E_n des endlichen Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion, wenn gilt

$$P(E_i) \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$
$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1$$

Definition 27. Die Funktion W, die jedem Wert der Zufallsvariablen X einen Wert einer Wahrscheinlichkeitsfunktion P zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X.

Man schreibt für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert k annimmt:

$$P(X = k)$$

4.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung in der WR

4.2.1 Erwartungswert

Definition 28. Sei X eine diskrete ZV mit der Wertemenge $W_X = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k_1)$, $P(X = k_2)$, …, $P(X = k_n)$. Dann heißt

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(X = k_i)$$

Erwartungswert der ZV X.
Der Erwartungswert ist ein Mittelwert, um den die Zufallsvariable schwankt. Er muss von der Zufallsvariablen selbst nicht angenommen werden.

Beispiel 53. Der Erwartungswert beim Würfeln ist also

$$E(X) = \mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Das bedeutet, dass beim Würfeln ein Wert in der Nähe von 3.5 zu erwarten ist.

Der Erwartungswert spielt eine besondere Rolle bei Gewinnfunktionen, auszuzahlende Beträge bei Versicherungen,…

4.2.2 Varianz

Definition 29. Sei X eine diskrete ZV mit der Wertemenge $W_X = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k_1)$, $P(X = k_2)$, …, $P(X = k_n)$. Dann heißt

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i - \mu)^2 \cdot P(X = k_i)$$

Varianz der ZV X.

4.2.3 Standardabweichung

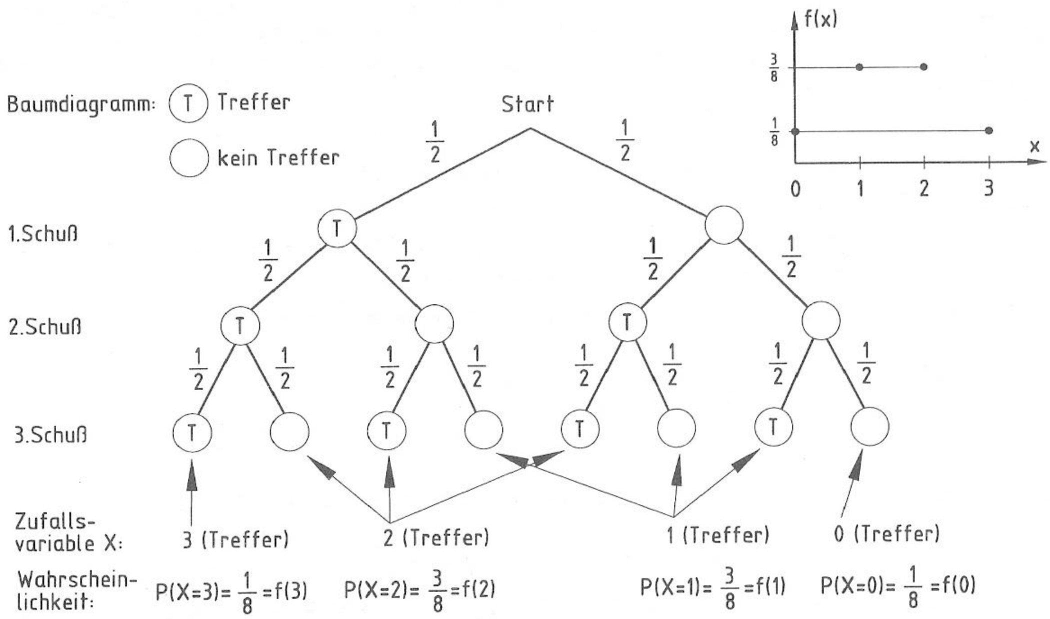
Definition 30. Sei X eine diskrete ZV mit der Wertemenge $W_X = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k_1)$, $P(X = k_2)$, ..., $P(X = k_n)$. Dann heißt

$$\sqrt{V(X)} = \sigma$$

Standardabweichung der ZV X.

Varianz und Standardabweichung sind Maße für die mittlere Abweichung der Zufallsvariablen vom Erwartungswert.

Beispiel 54. Auf eine Zielscheibe werden unabhängig von einander drei Schüsse abgegeben. Die Trefferwahrscheinlichkeit betrage für jeden Schuß $\frac{1}{2}$. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Treffer. Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion graphisch dar. Berechne μ, σ^2 und σ.



$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum_{i=1}^{4} k_i \cdot P(X = k_i) = \\
&= k_1 \cdot P(X = k_1) + k_2 \cdot P(X = k_2) + k_3 \cdot P(X = k_3) + k_4 \cdot P(X = k_4) = \\
&= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5 \\
\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{4} (k_i - \mu)^2 \cdot P(X = k_i) = \\
&= (k_1 - \mu)^2 \cdot P(X = k_1) + (k_2 - \mu)^2 \cdot P(X = k_2) + (k_3 - \mu)^2 \cdot P(X = k_3) + \\
&+ (k_4 - \mu)^2 \cdot P(X = k_4) = \\
&= (-1.5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-0.5)^2 \cdot \frac{3}{8} + 0.5^2 \cdot \frac{3}{8} + 1.5^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0.75 \\
\sigma &= \sqrt{0.75} \approx 0.87
\end{aligned}
$$

Die Formel $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \cdot P(X = k_i) - \mu^2$ dient zur einfacheren Berechnung der Varianz.

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{4} k_i^2 \cdot P(X = k_i) - \mu^2 = \\
&= k_1^2 \cdot P(X = k_1) + k_2^2 \cdot P(X = k_2) + k_3^2 \cdot P(X = k_3) + k_4^2 \cdot P(X = k_4) - \mu^2 = \\
&= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1.5^2 = 3 - 2.25 = 0.75
\end{aligned}
$$

4.3 Diskrete Verteilungen

4.3.1 Geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung kommt in der folgenden typischen Situation zur Anwendung: Ein Versuch wird n Mal wiederholt und dabei jeweils ein bestimmtes Ereignis A betrachtet, das mit der Wahrscheinlichkeit p (konstant) auftritt. Es soll gezählt werden, *wann A zum ersten Mal eintritt*.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

(($k-1$)-mal nicht eingetreten und beim k-ten Mal schon!)
Die dazugehörige Verteilungsfunktion lautet daher

$$P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} \cdot p$$

X ist geometrisch verteilt mit dem Parameter p.

Erwartungswert und Varianz der Geometrischen Verteilung

$$E(X) = \sum_i k_i \cdot P(X = k_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1}}_{\frac{1}{(1-q)^2} \text{ geom. Reihe}} \cdot p =$$

$$= p \cdot \frac{1}{(1-1+p)^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot (1-p)^{i-1}}_{\frac{1}{p^2}+\frac{2q}{p^3}} \cdot p - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Beispiel 55. Beim „Mensch-ärgere-dich-nicht“-Spiel darf man bekanntlich erst beginnen, wenn man zum ersten Mal eine Sechs würfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nicht vor dem 4. Versuch beginnen darf?

X ... Anzahl der benötigten Versuche

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) = \\
&= 1 - P(X = 1, 2, 3) = \\
&= 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right] = \\
&= 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}\right] = \\
&= 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216} \approx 57.87\%
\end{aligned}$$

Beim wievielten Mal würfeln fällt im Mittel zum ersten Mal eine Sechs?

$p = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{p} = 6 \\
\sigma^2(X) &= \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30 \\
\sigma(X) &= \sqrt{30} \approx 5.48
\end{aligned}$$

Im Mittel wird man beim 6. Mal würfeln erstmalig eine Sechs würfeln, wobei die Streuung rund 5.5 beträgt.

Beispiel 56. Ein Betrunkener will seine Haustür aufsperren. Er hat 5 gleichartige Schlüssel in der Tasche und probiert jeweils indem er den Schlüssel wieder zurücksteckt, wenn dieser nicht paßt („mit Wiederholung“).

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der richtige Schlüssel genau beim dritten Versuch gefunden wird?

X . . . Anzahl der benötigten Versuche

$$P(X = 3) = (1 - p)^2 \cdot p = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125} = 12.8\%$$

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 Versuche benötigt werden?

$$\begin{aligned} P(X > 3) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X = 1, 2, 3) = \\ = 1 - \left[\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}\right] = \\ = 1 - \left[\frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125}\right] = \\ = 1 - \frac{61}{125} = \frac{64}{125} = 51.2\% \end{aligned}$$

Übergang zur Binomialverteilung & Hypergeometrischen Verteilung

In den folgenden Abschnitten interessieren uns wiederum Versuche, die mehrmals wiederholt werden. Die Zufallsvariable „zählt“ nun aber im Gegensatz zur geometrischen Verteilung nicht, wann A zum ersten Mal eintritt, sonder *wie oft A in den n Versuchen auftritt*.
Bleibt bei den Versuchswiederholungen die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von A stets gleich, so kommt man zur Binomialverteilung.
Ändert sich hingegen die Wahrscheinlichkeit, mit der A im Laufe der Versuchsreihe eintritt, in Abhängigkeit von den vorangegangenen Versuche, so gelangt man zur Hypergeometrischen Verteilung.

4.3.2 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten Verteilungen. Das typische „Grundbeispiel“ für ihr Auftreten ist folgende Situation:
Ein Versuch wird n-Mal wiederholt und dabei wird jeweis dasselbe Ereignis E beobachtet, das jedesmal mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p eintritt
Interessant ist nun die Zufallsvariable X, die angibt, wie oft unter den n Versuchswiederholungen das Ereignis E eintritt. Diese Zufallsvariable heißt dann „binomialverteilt“.

Die Binomialverteilung (BV) ist bei jenen Zufallsexperimenten anwendbar, bei denen genau zwei verschiedene, einander ausschließende Ereignisse eintreten können. Bei diesen sogenannten BERNOULLI[7]-Experimenten kommt es also nur darauf an, ob ein Ereignis E oder das Gegenereignis E' eintritt.

$P(E) = p$	Erfolgswahrscheinlichkeit
$P(E') = 1 - p = q$	Wahrscheinlichkeit für Mißerfolg

Das folgende Beispiel soll zur Herleitung der Formel dienen:

Beispiel 57. In einer Urne sind 7 rote und 4 weiße Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Ziehungen mit Zurücklegen 3 rote Kugeln zu ziehen.

$$P(E) = \left(\frac{7}{11}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^2 \cdot \binom{5}{3}$$

Ist bei einem Bernoulli-Experiment $X = k$ die Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit p und das Gegenereignis E' mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ eintritt, so gilt:

$$P(X = k) = b_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{mit } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

und bedeutet: Die Warscheinlichkeit, dass E bei n Versuchen k-mal auftritt.

Definition 31. Wenn ein Erfolg E in einem n-mal unter denselben Bedingungen durchgeführten Versuch mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ für genau k Erfolge in n Versuchen

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

[7] Jakob BERNOULLI (1654 - 1705)

Beispiel 58 (Novak3,S61,33a(1)). Angabe

HÜ: 31, 32

Beispiel 59 (Novak3,S61,33b(1)). Angabe

HÜ: 33ab(2), 34

Beispiel 60 (Novak3,S62,35). Angabe

HÜ: 35cde, 36

Beispiel 61 (Novak3,S61,37). Angabe

HÜ: 38, 39

Beispiel 62 (Novak4,S160,6). Angabe

HÜ: 7

Beispiel 63 (Novak4,S160,8). Angabe

HÜ: 9

Beispiel 64 (Novak4,S161,10). Angabe ROULETTE

HÜ: 13, 14, 15

$\Longrightarrow$ Kombinatorik & Binomialverteilung (Umkehraufgaben) – UZUmkehraufgaben

Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

$$
\begin{aligned}
E(X) = \mu = \sum_{i=0}^{n} i \cdot P(X=i) = \\
&= 0 + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0 = \\
&= n \cdot pq^{n-1} + \frac{2n(n-1)}{2!} \cdot p^2 q^{n-2} + \cdots + n \cdot p^n = \\
&= np \cdot \left(q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \cdots + p^{n-1}\right) = \\
&= np \cdot (q+p)^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

Definition 32. Der Erwartungswert $E(X)$ für binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p lautet:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Definition 33. Die Varianz $V(X)$ für binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p lautet:

$$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$$

Definition 34. Die Standardabweichung σ für binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p lautet:

$$\sqrt{V(X)} = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beispiel 65. Die Wahrscheinlichkeit p für die Geburt eines Sohnes sei $p = 0.6$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit 5 Kindern

(a) genau 2 Söhne sind?
n=5; p=0.6

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 23.04\%$$

(b) mindestens 3 Söne sind?

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^0 = \\ &= 68.26\% \end{aligned}$$

(c) Berechne Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und das "Erwartungsintervall"!

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = n \cdot p = 5 \cdot 0.6 = 3 \\ V(X) &= \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 1.2 \\ \sigma &= \sqrt{1.2} = 1.095 \\ [\mu - \sigma, \mu + \sigma] &= [1.905, 4.095] \Rightarrow 2, 3 \text{ oder } 4 \end{aligned}$$

4.3.3 POISSONverteilung

Bei der sogenannten „POISSONverteilung“ geht es im wesentlichen um eine Approximation für die Binomialverteilung B$(k; n, p)$ bei großem n und kleinem p.
Die Berechnung der Binomialverteilung ist für große n sehr umständlich. Auch für seltene Ereignisse, die nur mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten p auftreten, ist eine Beschreibung durch die Binomialverteilung nicht sinnvoll. Wir fragen deshalb nach einer Näherungsformel für die Binomialverteilung für sehr große n, genauer: für $n \to \infty$
Setzt man im Term für $B(n, p)$ $\mu = n \cdot p$ und $p = \frac{\mu}{n}$, erhält man:

$$P(X = k) = B(k; n, p) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{\to 1} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}_{\to e^{-\mu}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

Der Grenzwert für $n \to \infty$ ist dann $\frac{\mu^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu}$.
Für „große“ n und (wegen $p = \frac{\mu}{n}$) „kleine“ p gilt somit die Näherungsformel

$$B(k; n, p) = P(X = k) \approx \frac{\mu^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu}$$

Diese Näherungsformel ist – als Faustregel – zweckmäßig, wenn $p \leq 0.05$ und $n \geq 10$, oder wenn $p \leq 0.1$ und $n \geq 50$.

Definition 35. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X der Form

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu} \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{R}^+$$

heißt **Poisson-Verteilung**.

Erwartungswert und Varianz der POISSONverteilung

Der Erwartungswert einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen ist $E(X) = \mu$. Für die Varianz findet man ebenfalls $V(X) = \mu$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu} = \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu} = \\ &= \mu \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\mu^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu}}_{P(X=k)}}_{1} = \underline{\underline{\mu}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \\ &= \cdots = \\ &= \underline{\underline{\mu}} \end{aligned}$$

4.3.4 Hypergeometrische Verteilung

Bei den im Kapitel Binomialverteilung betrachteten BERNOULLI-Experimenten wurde verlangt, dass jeder Versuch unter den gleichen Versuchsbedingungen abläuft. Im Urnenmodell haben wir dies realisiert, indem wir ein Ziehen *mit* zurücklegen betrachteten. Diese Voraussetzung ist aber bei vielen Experimenten unrealistisch: Wer legt ein Stück einer Produktion, das auf funktionstüchtig/defekt untersucht wurde, wieder in die Kiste zurück? Wie soll man einen destruktiven Versuch, bei dem das zu untersuchende Objekt (z.B. Munition) zerstört wird, wiederholen?
Hier ist das Ziehen *ohne* Zurücklegen aus einer Urne das geeignete Modell:

Beispiel 66. Eine Urne enthält 10 Kugeln, und zwar 4 rote und $10-4=6$ weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 3 Kugeln, die mit einem Griff gezogen werden, genau 2 rote (und dementsprechend genau $3-2=1$ weiße Kugel) sind?

$$P(r,r,w) = P(rrw) + P(rwr) + P(wrr) = 3 \cdot P(rrw) =$$
$$= 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Das Verteilungsgesetz der Hypergeometrischen Verteilung lautet:

Definition 36. Eine Urne enthält N Kugeln, und zwar M rote und $N-M$ weiße Kugeln. Zieht man daraus mit einem Griff n Kugeln, so gilt für die Anzahl X der gezogenen roten Kugeln:

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Wir überprüfen die allgemeine Formel anhand unseres Beispiels:
$N = 10$ Kugeln insgesamt
$M = 4$ rote Kugeln
$n = 3$ Kugeln werden ausgewählt
$k = 2$ rote sollen dabei sein

$$P(r,r,w) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{6!}{1!\cdot 5!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2} \cdot 6}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}} =$$
$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Beispiel 67. In einem Vorratsraum sind 50 Eier, von denen 2 mit Salmonellen verseucht sind; davon werden 10 Eier zur Verarbeitung geholt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 1 salmonellenhaltiges Ei zu verarbeiten?
$N = 50$ Eier insgesamt
$M = 2$ Eier mit Salmonellen
$n = 10$ Eier werden ausgewählt
$k \leq 1$ Eier mit Salmonellen sollen dabei sein

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{48}{10}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{48}{9}}{\binom{50}{10}} =$$
$$= \frac{1 \cdot 6540715896}{10272278170} + \frac{2 \cdot 1677106640}{10272278170} = \frac{236}{245} \approx \underline{\underline{96.33\%}}$$

Beispiel 68. In einer Urne befinden sich 10 gleichartige, nur durch ihre Farbe unterschiedliche Kugeln: 3 grüne und 7 rote. Es werden 4 Kugeln mit einem Griff gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von den gezogenen Kugeln (a) alle rot, (b) alle grün, (c) 3 rot und eine grün, (d) 1 rot und 3 grün, (e) mind. 2 Kugeln rot, (f) höchstens 2 Kugeln rot, (g) mehr als 2 Kugeln rot, (h) weniger als 2 Kugeln rot sind!

X ... Anzahl der roten Kugeln

(a) alle rot

$$P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{7!}{4!3!}}{\frac{10!}{4!6!}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{6} \approx \underline{\underline{16.67\%}}$$

(b) alle grün

Unmögliches Ereignis, da man nicht 4 grüne ziehen kann, wenn nur 3 vorhanden sind!

(c) 3 rot und eine grün

$$P(X = 3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{50\%}}$$

(d) 1 rot und 3 grün

$$P(X = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{30} \approx \underline{\underline{3.33\%}}$$

(e) mind. 2 Kugeln rot

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$= \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} =$$
$$= \frac{1}{210} \cdot [63 + 105 + 35] =$$
$$= \frac{29}{30} \approx \underline{\underline{96.67\%}}$$

(f) höchstens 2 Kugeln rot

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \\ &= 0 + \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} = \\ &= \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = \frac{1}{3} \approx \underline{\underline{33.33\%}} \end{aligned}$$

(g) mehr als 2 Kugeln rot

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= P(X=3) + P(X=4) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \approx \underline{\underline{66.67\%}} \end{aligned}$$

(h) weniger als 2 Kugeln rot

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X=0) + P(X=1) = \\ &= P(X=1) = \frac{1}{30} \approx \underline{\underline{3.33\%}} \end{aligned}$$

Beispiel 69. Wahrscheinlichkeitsverteilung wie beim Lotto (Ziehen ohne Zurücklegen, d.h. nicht konstante Wahrscheinlichkeit)

$$P(N, K, n, k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Los: N Objekte, K “richtige”
Stichprobe: n Objekte, k “richtige”

Erwartungswert und Varianz der Hypergeometrischen Verteilung Für die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M und n gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = n \cdot p = \\ &= n \cdot \frac{M}{N} \end{aligned}$$

$$V(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Für großes N (Faustregel: $N > 60$ bzw. $n < \frac{N}{10}$) kann man die Hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximieren.

4.4 Die Normalverteilung (Gaußsche Verteilung)

Für genügend großes n und $\sigma > 9$ kann das $P(X = k)$ einer binomialverteilten Zufallsgröße X auch angenähert werden durch

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(k)$$

Die statitischen Kennzahlen $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ bleiben gleich.

Die Normalverteilung ist die wichtigste Wahrscheinlichkeitsverteilung für stetige Merkmale. Ihre Bedeutung wurde Ende des 18. Jahrhunderts im Rahmen von Meßfehleruntersuchungen, die vor allem von Calr Friedrich GAUSS (1777-1855) durchgeführt wurden, bekannt. Der belgische Astronom und Statistiker Lambert Adolphe QUETELET (1796-1874) stellte fest, dass überraschend viele Zähl- nd Meßergebnisse Häufigkeitsverteilungen aufweisen, die dieser Verteilung ähnlich sind. Quetelet beschäftigte sich vorwiegend mit der Untersuchung des menschlichen Körperbaus und ging dabei von einem Durchschnitts- bzw. Normalmenschen aus. Diese Verteilung wird daher Normalverteilung oder GAUSS-Verteilung genannt.
Am einfachsten kann man sich die Entstehung der Normalverteilung als Grenzübergang aus einer Binomialverteilung am sogenannten GALTONschen Nagelbrett[8] vorstellen.

`http://statistik.wu-wien.ac.at/mathstat/hatz/vo/applets/Galton/galton.html`

Lies Buch S63!

Definition 37. Als Normalverteilung bezeichnet man die standardisierte Form der Gaußschen Verteilung. Dabei wird eine neue (=standardisierte) Zufallsvariable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ eingeführt.
Der Erwartungswert der Zufallsvariablen Z ist gleich 0, ihre Varianz ist gleich 1.

[8] Benannt nach Francis GALTON (1822-1911), englischer Reisender und Naturforscher.