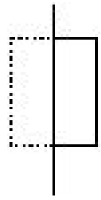
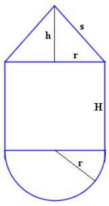
1. Ein Rechteck mit einem Umfang von 2m dreht sich um eine seiner Seiten. Wie müssen die Seiten des Rechtecks gewählt werden, damit (a) die Mantelfläche (b) das Volumen des entstehenden Drehzylinders möglichst groß wird?



2. Einer Halbkugel mit Radius R soll eine gerade quadratische Pyramide so eingeschrieben werden, dass die Spitze der Pyramide im Mittelpunkt des Basiskreises der Halbkugel liegt. Wie sind die Abmessungen der Pyramide zu wählen, wenn das Volumen maximal werden soll?[1]
3. Einer Kugel mit Radius R ist ein Drehzylinder einzuschreiben, der (a) maximales Volumen, (b) maximale Mantelfläche hat. Berechne seine Abmessungen.
4. Einer Kugel vom Radius R soll ein gerades quadratisches Prisma eingeschrieben werden. Wie groß müssen Grundkante und Höhe des Prismas gewählt werden, damit sein Volumen maximal wird? Berechne das Verhältnis $V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Prisma}}$.
5. Ein Fenster soll die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Der Gesamtumfang des Fensters sei 4m. Wie müssen Breite und Gesamthöhe des Fensters gewählt werden, damit der Lichteinfall (Fläche) maximal ist? (Gib alle Ergebnisse exakt an!)
6. Einem Viertelkreis mit Radius r soll ein Rechteck mit maximalem Umfang eingeschrieben werden. Wie sind a und b zu wählen?
7. Einem Drehkegel (R; H) wird ein Drehzylinder eingeschrieben. (Anm.: Strahlensatz!) (a) Der Zylinder soll maximales Volumen haben. (b) Der Mantel des Zylinders soll maximal werden.
   Wie viel % vom Kegelvolumen beträgt der Abfall, wenn man den Zylinder aus dem Kegel herausdrechselt?
8. Welche Punkte der Kurve $y = x^2 - \frac{9}{2}$ haben vom Ursprung minimalen Abstand?
9. Eine Boje aus Blech mit $V = 312\pi$ dm^3 hat die Gestalt eines Zylinders, dem oben ein Kegel und unten eine Halbkugel angesetzt sind. Die Kegelhöhe und der -radius verhalten sich wie 4 : 3. Wie sind die Abmessungen der Boje zu wählen, damit der Materialverbrauch (Oberfläche) möglichst gering wird?



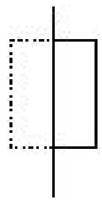
10. Einer regelmäßigen, quadratischen Pyramide (a, H) ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche einzuschreiben, der maximales Volumen besitzt. Gib Grundkante s, Höhe h und Volumen dieses Quaders an.

[1] Bemerkung zu 2. und 4.: Im Querschnitt ist die Diagonale von Pyramide bzw. Prisma zu sehen!

LÖSUNGEN:

1. (a) $a = b = 0.5$m
   (b) $a = 2/3$m, $b = 1/3$m
2. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$, $h = \frac{\sqrt{3}R}{3}$
3. (a) $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$, $V = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$
   (b) $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$, $h = R\sqrt{2}$, $M = 2R^2\pi$
4. $a = h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$; $3\pi : 2\sqrt{3}$
5. $b = h = \frac{8}{4+\pi}$
6. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}r$
7. (a) $V = \frac{4}{27}\pi R^2 H$
   (b) $h = \frac{H}{2}$, $r = \frac{R}{2}$, $M = \frac{R\pi H}{2}$; 62.5% (oder 55.6%)
8. P$(\pm 2| - 0.5)$
9. $O = 156\pi$ dm^2
10. $s = \frac{2a}{3}$, $h = \frac{H}{3}$, $V = \frac{4}{27}a^2 H$

1. Ein Rechteck mit einem Umfang von 2m dreht sich um eine seiner Seiten. Wie müssen die Seiten des Rechtecks gewählt werden, damit (a) die Mantelfläche (b) das Volumen des entstehenden Drehzylinders möglichst groß wird?



2. Einer Halbkugel mit Radius R soll eine gerade quadratische Pyramide so eingeschrieben werden, dass die Spitze der Pyramide im Mittelpunkt des Basiskreises der Halbkugel liegt. Wie sind die Abmessungen der Pyramide zu wählen, wenn das Volumen maximal werden soll?[2]

3. Einer Kugel mit Radius R ist ein Drehzylinder einzuschreiben, der (a) maximales Volumen, (b) maximale Mantelfläche hat. Berechne seine Abmessungen.

4. Einer Kugel vom Radius R soll ein gerades quadratisches Prisma eingeschrieben werden. Wie groß müssen Grundkante und Höhe des Prismas gewählt werden, damit sein Volumen maximal wird? Berechne das Verhältnis $V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Prisma}}$.

[2]Bemerkung zu 2. und 4.: Im Querschnitt ist die Diagonale von Pyramide bzw. Prisma zu sehen!

5. Ein Fenster soll die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Der Gesamtumfang des Fensters sei 4m. Wie müssen Breite und Gesamthöhe des Fensters gewählt werden, damit der Lichteinfall (Fläche) maximal ist? (Gib alle Ergebnisse exakt an!)

   Zielfunktion: $A = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi = a \cdot b + \frac{b^2\pi}{8}$
   Nebenbedingung: $u = 4\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{b}{2} \cdot \pi + 2a + b \\ 2a &= 4 - \frac{b\pi}{2} - b \\ a &= \underline{2 - \frac{b}{2} - \frac{\pi}{4}b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(b) &= \left(2 - \frac{b}{2} - \frac{\pi}{4}b\right) \cdot b + \frac{b^2\pi}{8} = \\ &= 2b - \frac{1}{2}b^2 - \frac{\pi}{4}b^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \\ &= 2b - b^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \\ A'(b) &= 2 - 2b \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ 2b \cdot \left(\frac{4+\pi}{8}\right) &= 2 \\ \underline{\underline{b = \frac{8}{4+\pi}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = a + \frac{b}{2} &= 2 - \frac{b}{2} - \frac{\pi}{4}b + \frac{4}{4+\pi} = \\ &= 2 - \frac{4}{4+\pi} - \frac{2\pi}{4+\pi} + \frac{4}{4+\pi} = \\ &= \frac{8+2\pi}{4+\pi} - \frac{2\pi}{4+\pi} = \underline{\underline{\frac{8}{4+\pi}}} \end{aligned}$$

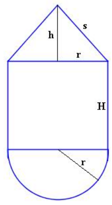
   Sowohl Breite, als auch Gesamthöhe müssen $\frac{8}{4+\pi} \approx 1.12\,\mathrm{m}$ lang sein.

6. Einem Viertelkreis mit Radius r soll ein Rechteck mit maximalem Umfang eingeschrieben werden. Wie sind a und b zu wählen?

7. Einem Drehkegel (R; H) wird ein Drehzylinder eingeschrieben. (Anm.: Strahlensatz!) (a) Der Zylinder soll maximales Volumen haben. (b) Der Mantel des Zylinders soll maximal werden.
   Wie viel % vom Kegelvolumen beträgt der Abfall, wenn man den Zylinder aus dem Kegel herausdrechselt?

8. Welche Punkte der Kurve $y = x^2 - \frac{9}{2}$ haben vom Ursprung minimalen Abstand?

9. Eine Boje aus Blech mit $V = 312\pi$ dm^3 hat die Gestalt eines Zylinders, dem oben ein Kegel und unten eine Halbkugel angesetzt sind. Die Kegelhöhe und der -radius verhalten sich wie 4 : 3. Wie sind die Abmessungen der Boje zu wählen, damit der Materialverbrauch (Oberfläche) möglichst gering wird?



10. Einer regelmäßigen, quadratischen Pyramide (a, H) ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche einzuschreiben, der maximales Volumen besitzt. Gib Grundkante s, Höhe h und Volumen dieses Quaders an.