1. Berechne ohne Taschenrechner:

   (a) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[5]{9}}$ (b) $\log_5 \sqrt[4]{125}$ (c) $\lg \sqrt{0.1}$ (d) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ (e) $\ln \sqrt[5]{\frac{1}{e^2}}$ (f) $\ln \frac{e}{\sqrt{e}}$ (g) $\log_a 1$ (h) $\log_2 -4$ (i) $\ln 1$ (j) $\ln e$

2. Berechne x:

   (a) $\log_x 9 = -2$ (b) $\log_x a^4 = 2$ (c) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$ (d) $\log_x 5 = 2$ (e) $\log_4 x = -1$ (f) $\lg x = -\frac{1}{4}$ (g) $\log_a x = a$

3. Berechne:

   (a) $\lg(\lg 10)$ (b) $\lg(\ln e^{10})$ (c) $\ln(\ln e)$ (d) $\ln(\lg 10^e)$

4. Zerlege mit Hilfe der Logarithmusregeln:

   (a) $\log_a \left(x^2 \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{z}}}\right) =$ (b) $\log_a \frac{\sqrt[4]{2a}\cdot \sqrt[3]{b^2}}{4b\cdot\sqrt{a}} =$ (c) $\log_a \left(4x^5 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2-a^2}{2x^3\sqrt{a}}}\right) =$

5. Stelle als Logarithmus eines einzigen Terms dar: $(\log_a \sim \log)$

   (a) $\frac{1}{3}[5\log x + 2\log(x-y)] - \log x - \frac{1}{2}\log y =$

   (b) $\frac{1}{2}[8\log x + \frac{3}{4}(5\log x - \frac{1}{3}\log c + 4\log a + \log b - \frac{2}{3}\log 2)] =$

6. Berechne mit dem Taschenrechner:

   (a) $\ln 2.5$ (b) $\log_3 4$ (c) $\log_{0.5} 7$

7. Löse folgende Gleichungen:

   (a) $5^x = 4$ (b) $e^{3x} = 2$ (c) $10^{2x} = \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$ (d) $5^{2x-1} = 3^{x+3}$ (e) $3^x + 5^{2x-3} = 7^{x+1}$ (f) $x^{\lg x} = 100 \cdot x$ (g) $(\ln x)^2 = 4$ (h) $\ln x^2 = 6$ (i) $\lg(6x+3) = \lg(3x-1) + \lg 3$

8. Bilde f^{-1} und g^{-1}, berechne die Nullstellen und zeichne die 4 Funktionen.

   $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, y = \frac{1}{4} \cdot 3^{x-1}$ $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, y = \ln(2x)$

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 3 \cdot e^{-2x}$ Bestimme f^{-1} und stelle f und f^{-1} dar.

10. Die Anzahl der Wale verringert sich jährlich um 8% ($A(t) = A_0(1 - \frac{p}{100})^t$). In wieviel Jahren ist nur mehr $\frac{1}{50}$ des Tierbestandes vorhanden?

11. Von einem radioaktiven Isotop (Pu 243) sind nach 3 Stunden bereits 34% der vorher vorhandenen Kerne zerfallen.
    (a) Berechne die Zerfallskonstante λ.
    (b) Gib das Zerfallsgesetz an.
    (c) Berechne die Halbwertszeit τ.
    (d) Wieviel g sind von anfänglich 10g nach einem Tag noch vorhanden?
    (e) Nach welcher Zeit sind nur mehr 0.1% der Anfangsmenge übrig?
12. 1991, fünf Jahre nach dem Reaktorunfall von Tschernobyl, beträgt die Belastung von Cäsium 137 noch 89.09% des Ursprünglichen.
    (a) Berechne die Halbwertszeit von Cäsium 137!
    (b) Wann ist die Cäsiumbelastung auf 10% des Maximalwertes gesunken?
13. Lebende Organismen nehmen u.a. Kohlenstoff auf und geben ihn auch wieder ab (Stoffwechsel). In der Atmosphäre – und daher auch in allen lebenden Organismen – findet man denselben konstanten Anteil des radioaktiven Kohlenstoffisotops C 14, dessen Halbwertszeit ca. 5760 Jahre beträgt. Nach dem Absterben des Organismus nimmt der C 14-Anteil exponentiell ab. Bei Ausgrabungen einer babylonischen Stadt, die zur Zeit König Hammurabis gebaut wurde, fand man im Jahre 1950 in einem Holzstück nur mehr 64% des ursprünglich vorhandenen C 14. Wann hat König Hammurabi ungefähr gelebt?
14. Bei Atombombenversuchen wird radioaktives Kobalt freigesetzt. Seine Halbwertszeit beträgt 5.3 Jahre. Berechne nach wie vielen Jahren 90% zerfallen sind.

LÖSUNGEN:

1. (a) $-\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{2}{3}$ (e) $-\frac{2}{5}$ (f) $\frac{1}{2}$ (g) 0 (h) nicht möglich (i) 0 (j) 1

2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) a^2 (c) $\frac{1}{81}$ (d) $\sqrt{5}$ (e) $\frac{1}{4}$ (f) $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$ (g) a^a

3. (a) 0 (b) 1 (c) 0 (d) 1

4. (a) $2\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{1}{6}\log z$
   (b) $\frac{1}{4}\log 2 + \frac{1}{4}\log a + \frac{2}{3}\log b - \log 4 - \log b - \frac{1}{2}\log a$
   (c) $\log 4 + 5\log x + \frac{1}{3}[\log(x-a) + \log(x+a) - \log 2 - 3\log x - \frac{1}{2}\log a]$

5. (a) $\log \frac{\sqrt[3]{x^5(x-y)^2}}{x\sqrt{y}}$ (b) $\log \sqrt{x^8 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x^5 \cdot a^4 \cdot b}{\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{4}}\right)^3}}$

6. (a) $0.916\ldots$ (b) $1.261859\ldots$ (c) $-2.807\ldots$

7. (a) $\log_5 4 \approx 0.86$
   (b) $\frac{\ln 2}{3} \approx 0.23$
   (c) $-\frac{1}{6}$
   (d) $\frac{\lg 135}{\lg \frac{25}{3}} \left(= \frac{\lg 5 + 3\lg 3}{2\lg 5 - \lg 3}\right)$
   (e) $\frac{\lg 7 + 3\lg 5}{\lg 3 + 2\lg 5 - \lg 7} = \frac{\lg 875}{\lg \frac{75}{7}} \approx 2.856$
   (f) $\frac{1}{10}; 100$
   (g) $\frac{1}{e^2}; e^2$
   (h) e^3
   (i) 2

8. $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : y = \log_3(4x) + 1$; f besitzt keine Nullstelle; f^{-1}: N($\frac{1}{12}$|0)
   $g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : y = \frac{1}{2}e^x$; g^{-1} besitzt keine Nullstelle; g: N($\frac{1}{2}$|0)

9. $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x}{3}$

10. 47 Jahre

11. (a) $\lambda \approx 0.1385$, t in h (b) $N(t) = N_0 \cdot e^{-0.1385 \cdot t}$ (c) $\tau \approx 5$ (d) $0.36g$ (e) $\approx 50h$

12. (a) $\tau = 30$ J. (b) im Jahre 2086

13. vor ≈ 3840 J.

14. 17.6 J.