

1. Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

(a)  $a_n = \frac{2n-7}{4n+1}$

(b)  $a_3 = 4; a_{n+1} = 2a_n - 1$

2. Ermittle das Bildungsgesetz der gegebenen Folgen und stelle fest, ob es sich im arithmetische oder geometrische Folgen handelt:

(a)  $\langle 4; 6; 9; 13\frac{1}{2}; \dots \rangle$

(c)  $\langle \frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{12}{7}; \dots \rangle$

(b)  $\langle \frac{1}{4}; \frac{5}{8}; 1; \frac{11}{8}; \dots \rangle$

(d)  $\langle -3; 9; -27; 81; \dots \rangle$

3. Überprüfe auf Monotonie:

(a)  $a_n = \frac{8n+7}{4n-3}$

(b)  $a_n = 15n - 3n^2$

(c)  $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

(d)  $a_n = \frac{3n+7}{3-6n}$

4. Bestimme, falls existent, den Grenzwert der gegebenen Folgen:

(a)  $a_n = \frac{(n+1)^3}{2n^4-5}$

(c)  $a_n = \frac{(n-2)^2}{7-3n^2}$

(b)  $a_n = \frac{n^2}{n+3}$

(d)  $a_n = \frac{4n^2-1}{5-3n^2} - \frac{7n}{2n-1}$

5. Bestimme den Grenzwert (+Beweis) und berechne, ab welchem Index  $n_0$  alle Folgenglieder in  $U(a, \varepsilon)$  sind:

(a)  $\langle \frac{5n-4}{1-2n} \rangle, \varepsilon = \frac{1}{80}$

(b)  $\langle \frac{2-5n}{1-4n} \rangle, \varepsilon = 0.01$

(c)  $\langle \frac{3-n^2}{2n^2} \rangle, \varepsilon = 0.04$

6. In einem rechtwinkligen Dreieck bilden sie Seiten eine arithmetische Folge. Der Umkreisradius ist mit  $r = 7\text{cm}$  gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

7. Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:  $a_3 = 27$  und  $a_7 = 71$ . Berechne den erzeugenden Term,  $a_{11}$  und  $s_{31}$ .

8. Die Summe der erten 7 Glieder einer arithmetischen Folge beträgt 84, das 3. Glied ist 8.5. Berechne den Term, sowie  $s_{12}$ .

9. In einer arithmetischen Folge ist das Produkt aus dem 2. und 7. Glied 156, die Summe aus dem 2. bis 5. Glied beträgt 48. Berechne die ersten 7 Folgenglieder.

10. In einer geometrischen Folge ist die Summe aus dem 2. und 3. Glied 5, das Verhältnis vom 1. zum 4. Glied 1:8. Wie lautet das Bildungsgesetz? Berechne die Summe der ersten 15 Glieder.

11. Die Summe der Quadrate der ersten 3 Glieder einer geometrischen Folge ist 47.25. Das Produkt aus dem ersten und dem 3. Glied ist 9. Berechne die 3 Glieder! (Nur eine Lösung!)

LÖSUNGEN:

1. (a)  $\langle -1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{13}; \frac{1}{17}; \frac{1}{7}; \dots \rangle$  (b)  $\langle \frac{7}{4}; \frac{5}{2}; 4; 7; 13; \dots \rangle$
2. (a) geom. F.  $b_n = 4 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1} = \frac{8}{3} \cdot (\frac{7}{2})^n$  (c) weder noch  $a_n = \frac{5n-3}{2n+1}$   
 (b) arithm. F.  $a_n = \frac{3}{8}n - \frac{1}{8}$  (d) geom. Folge  $(-3)^n$
3. str. mo. fa.; weder noch; str. mo. fa.; str. mo. wa.
4. 0, divergent,  $-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{29}{6}$
5. (a)  $a = -\frac{5}{2}, n_0 = 61$  (b)  $a = \frac{5}{4}, n_0 = 20$  (c)  $a = -\frac{1}{2}, n_0 = 7$
6.  $a = 8.4\text{cm}, b = 11.2\text{cm}, c = 14\text{cm}, A = 47.04\text{cm}^2$
7.  $a_n = 11n - 6, a_{11} = 115, s_{31} = 5270$
8.  $a_n = 3.5n - 2, s_{12} = 249$
9.  $\langle 2; 6; 10; 14; 18; 22; 26; \dots \rangle, \langle \frac{74}{7}, \frac{78}{7}, \frac{82}{7}, \frac{86}{7}, \frac{90}{7}, \frac{94}{7}, \frac{98}{7}, \dots \rangle$
10.  $b_1 = \frac{5}{6}, q = 2, s_{15} = 27305.833$
11. 4 Lösungen:  $q_{1,2} = \pm 2, q_{3,4} = \pm 0.5$  für  $q = 2: \langle \frac{3}{2}; 3; 6; \dots \rangle$

VOLLSTÄNDIGE Durchrechnung:

1. Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

(a)  $a_n = \frac{2n-7}{4n+1}$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = -\frac{1}{3}$$

$$a_3 = -\frac{1}{13}$$

$$a_4 = \frac{1}{17}$$

$$a_5 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\left\langle -1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{13}; \frac{1}{17}; \frac{1}{7}; \dots \right\rangle$$

(b)  $a_3 = 4; a_{n+1} = 2a_n - 1$

$$a_1 = \frac{7}{4}$$

$$a_2 = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = 4$$

$$a_4 = 7$$

$$a_5 = 13$$

$$\left\langle \frac{7}{4}; \frac{5}{2}; 4; 7; 13; \dots \right\rangle$$

2. (a)  $\langle 4; 6; 9; 13\frac{1}{2}; \dots \rangle$  geometrische Folge

$$q = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n : \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

(b)  $\langle \frac{1}{4}; \frac{5}{8}; 1; \frac{11}{8}; \dots \rangle$  arithmetische Folge

$$k = \frac{3}{8}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot k$$

$$a_n = \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \frac{3}{8}$$

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}n - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}n$$

(c)  $\langle \frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{12}{7}; \dots \rangle$  weder noch

$$+ \frac{11}{15}, + \frac{11}{35}$$

$$a_n = \frac{a_1 + (n-1) \cdot k}{a_1 + (n-1) \cdot k}$$

$$a_n = \frac{2 + 5n - 5}{3 + 2n - 2} = \frac{5n - 3}{2n + 1}$$

(d)  $\langle -3; 9; -27; 81; \dots \rangle$  geometrische Folge

$$q = -3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = (-3) \cdot (-3)^n : (-3)$$

$$a_n = (-3)^n$$

3. (a)  $a_n = \frac{8n+7}{4n-3} \langle \frac{15}{1}; \frac{33}{5}; \frac{31}{9}; \dots \rangle$  Vermutung: Streng monoton fallend

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{8(n+1)+7}{4(n+1)-3} < \frac{8n+7}{4n-3}$$

$$\frac{8n+15}{4n+1} < \frac{8n+7}{4n-3}$$

$$(8n+15)(4n-3) < (8n+7)(4n+1)$$

$$32n^2 - 24n + 60n - 45 < 32n^2 + 8n + 28n + 7$$

$$36n - 45 < 36n + 7$$

$$-45 < 7 \quad \text{w.A.} \Rightarrow \text{str. mo. fa.}$$

(b)  $a_n = 15n - 3n^2 \langle 12; 18; 18; 12; 0; -18; \dots \rangle$  weder Steigend noch fallen!

(c)  $a_n = \frac{n}{n^2+1} \langle \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{4}{17}; \dots \rangle$  Vermutung: Streng monoton fallend

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

$$(n+1)(n^2+1) < n(n+1)^2+1$$

$$n^3 + n + n^2 + 1 < n(n^2 + 2n + 1) + 1$$

$$n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + n + 1$$

$$0 < n^2 \quad \text{w.A.} \Rightarrow \text{str. mo. fa.}$$

(d)  $a_n = \frac{3n+7}{3-6n} \langle -\frac{10}{3}; -\frac{13}{9}; -\frac{16}{15}; \dots \rangle$  Vermutung: Streng monoton steigend

$$a_n < a_{n+1}$$

$$\frac{3n+7}{3-6n} < \frac{3(n+1)+7}{3-6(n+1)}$$

$$(3n+7)(-3-6n) < (3n+10)(3-6n)$$

$$-9n - 18n^2 - 21 - 42n < 9n - 18n^2 + 30 - 60n$$

$$-51n - 21 < -51n + 30$$

$$-21 < 30 \quad \text{w.A.} \Rightarrow \text{str. mo. st.}$$

4. (a)  $a_n = \frac{(n+1)^3}{2n^4-5} \left\langle -\frac{8}{3}, \frac{27}{27}, \frac{64}{76}, \frac{125}{251} \dots \right\rangle$

$$a_n = \frac{\frac{n^3}{n^4} + \frac{2n}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{\frac{2n^4}{n^4} - \frac{5}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{2 - \frac{5}{n^4}} = \frac{0}{2}$$

Grezwert: 0  $a = 0$

(b)  $a_n = \frac{n^2}{n+3} \left\langle \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{9}{6}, \frac{16}{7} \dots \right\rangle$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{0}$$

Divergent!

(c)  $a_n = \frac{(n-2)^2}{7-3n^2}$

$$a_n = \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{7}{n^2} - 3} = -\frac{1}{3}$$

Grezwert:  $-\frac{1}{3}$

(d)  $a_n = \frac{4n^2-1}{5-3n^2} - \frac{7n}{2n-1}$

$$a_n = \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n^2} - 3} - \frac{7}{2 - \frac{1}{n}} = -\frac{4}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{8}{6} - \frac{21}{6}$$

Grezwert:  $-\frac{29}{6}$

5. (a)  $\left\langle \frac{5n-4}{1-2n} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{1}, \frac{6}{3}, -\frac{11}{5}, \dots \right\rangle$   
 Vermuteter Grenzwert:  $-\frac{5}{2}$

$$a_n - a < \varepsilon$$

$$\frac{5n-4}{1-2n} + \frac{5}{2} < \varepsilon$$

$$2(5n-4) + 5(1-2n) > 2\varepsilon(1-2n)$$

$$10n-8+5-10n > 2\varepsilon-4\varepsilon n$$

$$-3 > 2\varepsilon-4\varepsilon n$$

$$4\varepsilon n > 2\varepsilon+3$$

$$n > \frac{2\varepsilon+3}{4\varepsilon} \quad \varepsilon = \frac{1}{80}$$

$$n > \frac{\frac{1}{40}+3}{\frac{1}{20}}$$

$$n > 60.5 \quad n_0 = 61$$

(b)  $\left\langle \frac{2-5n}{1-4n} \right\rangle = \left\langle +\frac{3}{3}, +\frac{8}{7}, +\frac{13}{11}, \dots \right\rangle$

Vermuteter Grenzwert:  $\frac{5}{4}$

$$\begin{aligned}
 a - a_n &< \varepsilon \\
 \frac{5}{4} - \frac{2-5n}{1-4n} &< \varepsilon \\
 5(1-4n) - 4(2-5n) &< 4\varepsilon(1-4n) \\
 5 - 20n - 8 + 20n &< 4\varepsilon - 16\varepsilon n \\
 -3 &< 4\varepsilon - 16\varepsilon n \\
 n &< \frac{4\varepsilon + 3}{16\varepsilon} \quad \varepsilon = 0.01 \\
 n &< \frac{3.04}{0.16} \\
 n &< 19 \quad n_0 = 20
 \end{aligned}$$

(c)  $\left\langle \frac{3-n^2}{2n^2} \right\rangle = \left\langle \frac{2}{2}; -\frac{1}{8}; -\frac{6}{18}; \dots \right\rangle$   
 Vermuteter Grenzwert:  $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 a_n - a &< \varepsilon \\
 \frac{3-n^2}{2n^2} + \frac{1}{2} &< \varepsilon \\
 6 - 2n^2 + 2n^2 &< 4n^2\varepsilon \\
 \sqrt{\frac{3}{2\varepsilon}} &< n \quad \varepsilon = 0.04 \\
 n &> 6.12 \quad n_0 = 7
 \end{aligned}$$

6. arithmetische Folge      Umkreisradius = 7cm

$$\begin{aligned}
 a &= a_1 \\
 b &= a_1 + k \\
 c = 14 &= a_1 + 2k \quad \Rightarrow a_1 = 14 - 2k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 a_1^2 + (a_1 + k)^2 &= 14^2 \\
 a_1^2 + a_1^2 + 2a_1k + k^2 &= 196 \\
 2a_1^2 + 2a_1k + k^2 &= 196 \\
 2(14 - 2k)^2 + 2k(14 - 2k) + k^2 &= 196 \\
 2(196 - 56k + 4k^2) + 28k - 4k^2 + k^2 &= 196 \\
 392 - 112k + 8k^2 + 28k - 4k^2 + k^2 &= 196 \\
 5k^2 - 84k + 196 &= 0 \\
 k_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 k_{1,2} &= \frac{84 \pm \sqrt{(-84)^2 - 20 \cdot 196}}{10} \\
 (k_1 = 14) \quad k_2 &= 2.8 \\
 a_1 &= 8.4
 \end{aligned}$$

$$a = 8.4\text{cm}$$

$$b = 11.2\text{cm}$$

$$c = 14\text{cm} \quad A = 47.04\text{cm}^2$$

$$7. \ a_3 = 27; a_7 = 71$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$$

$$a_3 = a_1 + 2k$$

$$a_1 = -2k + 27 \quad 27 = a_1 + 22$$

$$a_7 = a_1 + 6k \quad a_1 = 5$$

$$a_1 = -6k + 71$$

$$-2k + 27 = -6k + 71$$

$$4k = 44$$

$$k = 11$$

$$a_n = a_1 + 11n - 11$$

$$a_n = 11n - 6$$

$$a_{11} = 115 \quad a_{31} = 335$$

$$s_{31} = \frac{31}{2}(5 + 335)$$

$$s_{31} = 5270$$

$$8. \ s_7 = 84, a_3 = 8.5$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)k$$

$$s_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) \quad a_7 = a_1 + 6k$$

$$a_3 = a_1 + 2k$$

$$s_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_1 + 6k)$$

$$84 = \frac{7}{2}(2a_1 + 6k)$$

$$12 - 3k = a_1$$

$$8.5 = (12 - 3k) + 2k$$

$$-3.5 = -k$$

$$k = 3.5 \quad a_1 = 1.5$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)k$$

$$a_n = 1.5 + 3.5n - 3.5$$

$$a_n = 3.5n - 2 \quad a_{12} = 40$$

$$s_{12} = 6(1.5 + 40)$$

$$s_{12} = 249$$

9. In einer arithmetischen Folge ist das Produkt aus dem 2. und 7. Glied 156, die Summe aus dem 2. bis 5. Glied beträgt 48. Berechne die ersten 7 Folgenglieder.
10. In einer geometrischen Folge ist die Summe aus dem 2. und 3. Glied 5, das Verhältnis vom 1. zum 4. Glied 1:8. Wie lautet das Bildungsgesetz? Berechne die Summe der ersten 15 Glieder.
11. Die Summe der Quadrate der ersten 3 Glieder einer geometrischen Folge ist 47.25. Das Produkt aus dem ersten und dem 3. Glied ist 9. Berechne die 3 Glieder! (Nur eine Lösung!)