»Nur eingebildet?«

Es dauerte lange, bis die Mathematiker die negativen Zahlen als einen neuen Zahlentyp anerkannten, obwohl ihnen diese Zahlen als Hilfsgrößen beim Lösen von Gleichungen vertraut waren. Zu Beginn des 16. Jahrhunderts fanden in den blühenden Stadtstaaten Italiens richtige Wettkämpfe im Lösen von Gleichungen statt. Die Streithähne entwickelten komplizierte Lösungsformeln, die für alle Gleichungen eines Typs passten, hielten sie aber geheim, um ihrem Gegner keinen Vorteil einzuräumen. Während z. B. Antonio Fior von seinem Lehrer die allgemeine Formel für Gleichungen wie $x^3 + 2x - 7 = 0$ oder $x^3 + 5x + 2 = 0$ erfuhr, übertraf ihn Niccolo Tartaglia (um 1500–1557), »der Stotterer«, mit einer Formel für $x^3 + ax^2 + b = 0$. Tartaglia vertraute sie Geronimo Cardano (1501–1576) an, der sie gegen dessen Willen 1545 in einem Buch über Gleichungen veröffentlichte. Cardano sah, dass in vielen Lösungsformeln nicht nur die »gedichteten«, also »unwirklichen« negativen Zahlen auftraten, sondern noch weitere »unmögliche« Rechenausdrücke, nämlich Wurzel aus negativen Zahlen wie $\sqrt{-4}$. Der Ausdruck $\sqrt{-4}$ soll die Zahl sein, die quadriert – 4 ergibt. Da aber + 2 und – 2 als Quadrat den Wert + 4 haben, gab es unter den bekannten Zahlen keine, deren Quadrat – 4 war. Daher nannte Descartes diese Wurzeln »seulement imaginaires«, d.h. »nur eingebildet«. Tatsächlich handelt es sich hierbei um eine neue Zahlenart. — Die Einheit dieser neuen Zahlen ist die Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = i \cdot i = -1$ bzw. $i = \sqrt{-1}$. Vielfache von i wie beispielsweise $6 \cdot i$ nennt man imaginäre Zahlen.

Geronimo Cardano befasste sich mit der Lösung kubischer Gleichungen

Komplexe Zahlen

Aus der Einheit i und »normalen« Zahlen a, b setzt man die komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ zusammen. Dabei nennt man a den Realteil und b den Imaginärteil von z. Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit C. Mit a + bi rechnet man, als hätte man einen Rechenausdruck $a + b \cdot c$ vor sich, ersetzt allerdings i^2 stets durch – 1. Zwei Beispiele sollen das erläutern:

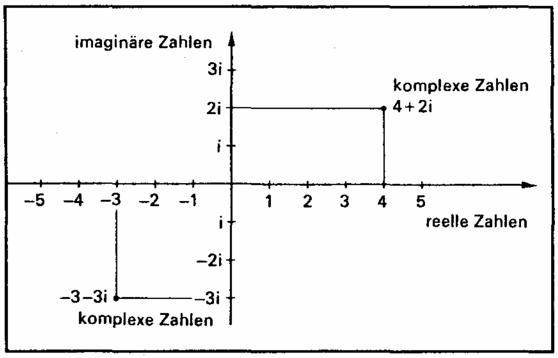
$$(3+2\cdot i)+(1+3\cdot i)=3+1+2i+3i= \\ =4+(2+3)\cdot i=4+5i$$

$$(3+2\cdot i)\cdot(1+3\cdot i)=3\cdot 1+3\cdot 3i+2i\cdot 1+2i\cdot 3i= \\ =3+9i+2i+6i^2= \\ =3+11i+6\cdot(-1)= \\ =3+11i-6=-3+11i$$

Doch obwohl man mit ihnen rechnen konnte, erschienen die komplexen Zahlen lange nur als ein trickreiches mathematisches Hilfsmittel ohne Bezug zur Wirklichkeit. Noch Leibniz nannte die imaginären Zahlen »ein Monstrum der idealen Welt, fast ein Amphibium zwischen Sein und Nicht-Sein«. Das änderte sich, als Gauß die komplexen Zahlen geometrisch als Punkte einer Ebene deutete.

Carl Friedrich Gauß, einer der größten Mathematiker aller Epochen.

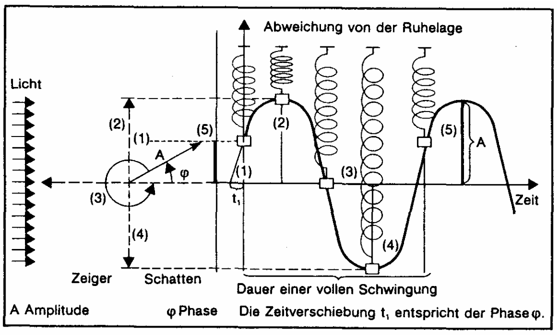
Der Realteil a der komplexen Zahl a + bi gibt an, wieweit man in der Ebene vom Ausgangspunkt, dem Ursprung eines Koordinatensystems, nach links oder rechts gehen muss, während der Imaginärteil b die Wanderung in Nord-Süd-Richtung beschreibt. Zum Punkt 4 + 2i führen vier Schritte nach rechts und zwei nach oben, nach Norden (siehe Abb.);



den Punkt –3 – 3i erreicht man durch drei Schritte nach links und drei nach unten, nach Süden. Statt durch einen Punkt der Ebene kann man eine komplexe Zahl auch durch den Pfeil oder »Zeiger« beschreiben, der vom Koordinaten-Nullpunkt zu diesem Punkt weist. Zwei komplexe Zahlen zu addieren bedeutet dann, zwei Pfeile, ohne ihre Richtung zu ändern, aneinander zu setzen oder zwei Wanderungen nacheinander auszuführen. — Für viele Fälle ist es allerdings besser, einen Zeiger durch seine Länge und den Winkel zwischen Zeiger und positiver West-Ost-Achse festzulegen. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl dreht und streckt dann diesen Zeiger. — Nach dieser einfachen Deutung erscheint es als großer Umweg, dass die komplexen Zahlen über solch umständliche Lösungsformeln entdeckt wurden!

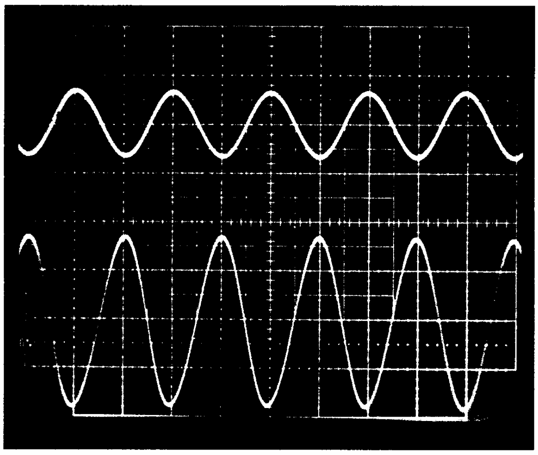
Die Anwendungsmöglichkeiten der komplexen Zahlen erschlossen sich in vollem Umfang, als Bernhard Riemann (1826–1866) die Funktionentheorie entwickelte. Die Funktionentheorie untersucht komplexe Funktionen, also Zuordnungen, die komplexen Zahlen ebenfalls wieder komplexe Zahlen zuordnen. Bei der Temperaturregelung im menschlichen Körper treten solche Funktionen ebenso auf wie bei den Atommodellen der Quantenphysik. Schwingungen und Wellen aller Art lassen sich mit komplexen Funktionen besonders gut beschreiben und einfach berechnen. Das gilt für die Schwingungen einer Violinsaite ebenso wie für die Schwankungen des Wechselstroms, für Wasserwellen ebenso wie für die elektromagnetischen Radiowellen.

Die Beziehungen zwischen komplexen »Zeigern« und Schwingungen zeigt folgender Versuch mit einem tatsächlichen Zeiger (siehe Abb.).



Beleuchtet man den Zeiger, der sich gleichmäßig dreht, von der Seite, so wächst und schrumpft sein Schatten, schwingt auf und ab und bewegt sich genauso wie ein auf- und abschwingendes Federpendel. Schwingt das Pendel völlig regelmäßig, kann man seine Bewegung durch drei Angaben festlegen: Die Frequenz gibt an, wie oft das Pendel in einer Sekunde auf- und abschwingt, die Amplitude gibt die größte Auslenkung aus der Ruhelage an, und die Phase legt fest, in welcher Lage sich das Pendel zu Beginn der Beobachtung befand. Die letzte Angabe ist wichtig, um die zeitliche Verschiebung t zwischen zwei ansonsten gleichen Schwingungen festzulegen. Bewegt sich der Schatten eines Zeigers wie das Federpendel, so entspricht die Zeigerlänge der Amplitude, und der Winkel, den der Zeiger bei Beobachtungsbeginn mit der West-Ost-Achse einschließt, beschreibt die Phase der Schwingung. Gibt man noch die Frequenz an, so legt der Zeiger zu Beobachtungsbeginn die Schwingung vollständig fest.

Ein Hi-Fi-Verstärker verstärkt eine schwache elektromagnetische Schwingung, bevor sie im Lautsprecher in eine hörbare Schwingung umgewandelt wird. Seine Wirkung lässt sich ebenfalls durch komplexe Zahlen beschreiben: Er verstärkt die Schwingung, die durch einen komplexen Zeiger festgelegt ist, d.h. er vergrößert ihre Amplitude und verschiebt eventuell ihre Phase. Das entspricht einer Streckung und einer Drehung des Zeigers und damit einer Multiplikation des Zeigers mit einer komplexen Zahl, die den Verstärker charakterisiert. Nun enthalten Musik und Sprache Schwingungen mit vielen verschiedenen Frequenzen; damit eine Sinfonie unverzerrt aus dem Lautsprecher klingt, müssen daher alle Schwingungen in gleicher Weise verstärkt werden. Verstärker-Kennlinien geben an, für welche Frequenzen das einigermaßen zutrifft. Man kann über jeder Frequenz die Verstärkung der Amplitude bzw. die Verschiebung der Phase auftragen und erhält zwei Kennlinien. Bei einer Frequenz legen die Amplitudenverstärkung und die Phasenverschiebung gerade einen komplexen Zeiger fest. Trägt man für alle Frequenzen diese Zeiger in der komplexen Zahlenebene ein, beschreiben ihre Spitzen die Ortskurve des Verstärkers. Auch für andere elektronische Bauteile kann man solche Kennlinien und Ortskurven aufstellen, und der Fachmann kann daraus ihre Eigenschaften ablesen.



Die Verstärkung einer elektromagnetischen Schwingung entspricht der Multiplikation mit einer komplexen Zahl; oben unverstärktes, unten verstärktes Signal.

Wer den Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen Zahlen N über die ganzen Zahlen Z bis zu den komplexen Zahlen C verfolgt (die Bruchzahlen und reellen Zahlen blieben bisher ausgespart), mag sich fragen, ob die Mathematiker nicht noch weitere Zahlenmengen gefunden haben. Tatsächlich lassen sich Quaternionen aufweisen, Zahlen in der Form $a + bi + cj + dk$ mit den vier Einheiten 1, i, j, k, doch gehen bei dieser Erweiterung des Zahlensystems wichtige Rechenregeln verloren. Die Regel $x \cdot y = y \cdot x$, das Kommutativgesetz der Multiplikation, gilt nicht mehr. So hat man mit den komplexen Zahlen tatsächlich einen gewissen Abschluss erreicht. Das gilt auch für die alte Frage der Algebra nach der Zahl der Lösungen für Gleichungen wie beispielsweise $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 7 = 0$ oder $x^3 = 8$. Der Hauptsatz der Algebra sagt nun: Wenn x^n die höchste Potenz der Unbekannten x in der Gleichung ist, gibt es genau n komplexe Zahlen, die die Gleichung erfüllen; die Gleichung hat folglich n Lösungen.