NEWTONsches Näherungsverfahren

Mag. Mone Denninger

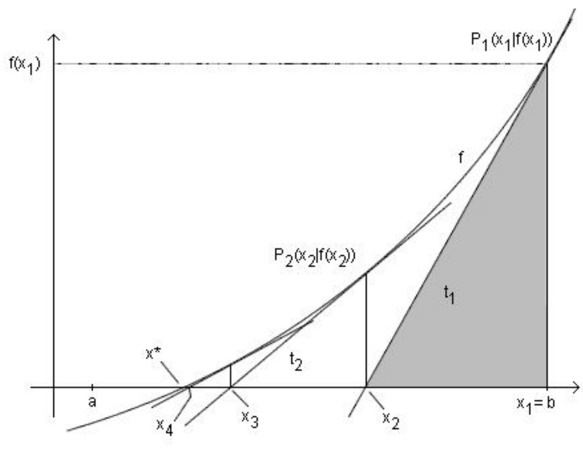
10. Oktober 2004

NEWTONsches Näherungsverfahren

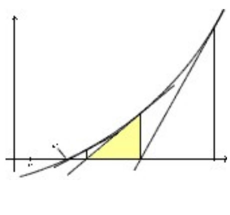
Nicht immer sind die zu bestimmenden Nullstellen von ganzrationalen Funktionen ganzzahlig, so dass man mit der Polynomdivision nicht sinnvoll arbeiten kann. Erst recht gilt dies, wenn man Nullstellen von nichtrationalen Funktionen wie Exponentialfunktionen oder trigonometrischen Funktionen sucht.
Man muss die Nullstellen in diesem Fall näherungsweise bestimmen; ein elegantes und sehr effektives Verfahren hierzu ist das **Newtonsche Näherungsverfahren**.
Man geht bei diesem Verfahren davon aus, dass ein Intervall $[a;b]$ bekannt ist, in dem die gesuchte Nullstelle x^* liegt. Man wählt nun eine geeignete Intervallgrenze als erste Näherung und damit als Startstelle x_1 für das Verfahren; im Beispiel ist es b.
Betrachtet man nun das grau unterlegte Steigungsdreieck, so ist die Steigung der darin enthaltenen Tangente t_1 gleich der Steigung des Graphen von f in P_1 und damit gilt:

$$k = f'(x_1).$$

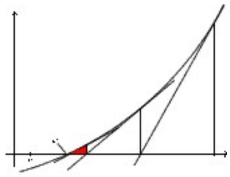
Durch Umformen erhält man nun die gegenüber x_1 verbesserte Näherung x_2.



Das Steigungsdreieck zum zweiten Schritt sähe dann so aus:



Zum dritten Schritt:



$$\begin{aligned} k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} &= f'(x_1) \\ \Leftrightarrow f(x_1) &= f'(x_1) \cdot (x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x_1 - x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \end{aligned}$$

Die Umformungen sollten leicht nachvollziehbar sein. Der Zähler in der ersten Zeile müsste eigentlich $f(x_1) - f(x_2)$ sein; da aber der Punkt auf der Tangente mit der x-Koordinate x_2 gleichzeitig auf der x-Achse liegt, gilt $f(x_2) = 0$.
Zu unserer Freude vereinfachen sich dadurch die weiteren Umformungen erheblich.
Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man zu den weiteren Näherungen x_3, x_4,...

Allgemein ist die Formel für den n-ten Schritt des Verfahrens:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

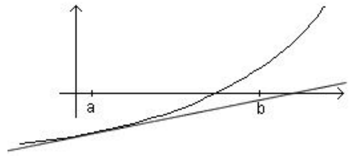
(x_1 ist der Startwert, der erste Schritt liefert x_2!)[1]

Bemerkung zum Begriff “geeignete Startstelle”:

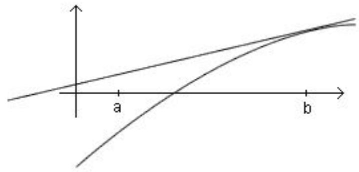
In ungünstigen Fällen schneidet die Tangente t_1 die x-Achse außerhalb des Intervalls $[a; b]$.

[1] In manchen Büchern wird der Startwert auch mit x_0 bezeichnet.

Hier ist der Graph linksgekrümmt und der Funktionswert der Startstelle ist kleiner als Null. Die Tangente schneidet die x-Achse außerhalb des Intervalls $[a; b]$.



Hier ist der Graph rechtsgekrümmt und der Funktionswert der Startstelle ist größer als Null. Die Tangente schneidet die x-Achse wieder außerhalb des Intervalls $[a; b]$.



In den beiden Fällen gilt aber $f(x_1) \cdot f''(x_1) < 0$. Überprüft man die Startstelle darauf, ob diese Bedingung erfüllt ist, beobachtet man fast immer, dass sich die Näherungswerte in einer Richtung der Stelle x^* nähern.