Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zum Unterschied zu Polynomfunktionen sind rationale Funktionen nicht überall definiert.

Beispiel 1: Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ *und zeichne den Graphen im Intervall* $[-6; 6]$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3}{x^2-4} \quad (\text{Quotientenregel}) \\
f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot (2x)}{(x^2-4)^2} = \\
&= \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \\
&= \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} \\
f''(x) &= \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2-4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \\
&= \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2-4) - (x^4 - 12x^2)4x}{(x^2-4)^3} = \\
&= \frac{4x^5 - 24x^3 - 16x^3 + 96x - 4x^5 + 48x^3}{(x^2-4)^3} = \\
&= \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} \\
f'''(x) &= \frac{(24x^2 + 96) \cdot (x^2-4)^3 - (8x^3 + 96x) \cdot 3(x^2-4)^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^6} = \\
&= \frac{(24x^2 + 96) \cdot (x^2-4) - (8x^3 + 96x) \cdot 6x}{(x^2-4)^4} = \\
&= \frac{24x^4 + 96x^2 - 96x^2 - 384 - 48x^4 - 576x^2}{(x^2-4)^4} = \\
&= \frac{-24x^4 - 576x^2 - 384}{(x^2-4)^4} = \\
&= \frac{-24(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2-4)^4}
\end{aligned}
$$

1. Definitionsmenge
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$
Die Funktion ist für die Nullstellen des Nenners nicht definiert:
$$\begin{aligned}(x^2-4) &= 0\\ (x+2)(x-2) &= 0\\ x &= 2 \vee x = -2\end{aligned}$$
D=$\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$
Die Funktions besitzt zwei Polstellen.

2. Nullstellen
$$\begin{aligned}f(x) &= 0\\ \frac{x^3}{x^2-4} &= 0\\ x^3 &= 0\end{aligned}$$
N$(0|0)$ ist eine dreifache Nullstelle.

3. Extremwerte
$$\begin{aligned}f'(x) &= 0\\ \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} &= 0\\ x^2(x^2-12) &= 0\\ x^2 &= 0 \vee x^2-12 = 0\\ x &= 0 \vee x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{12}\end{aligned}$$
Nachweis und Art des Extremums:
$$\begin{aligned}f''(0) &= \frac{8\cdot 0+96\cdot 0}{(0^2-4)^3} = 0 \quad \text{Kein relatives Extremum!}\\ f''(-\sqrt{12}) &= \frac{8\cdot(-\sqrt{12})^3+96\cdot(-\sqrt{12})}{((-\sqrt{12})^2-4)^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -1.298\cdots < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}\\ f''(\sqrt{12}) &= \frac{3\sqrt{3}}{4} = 1.298\cdots > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}\\ f(-\sqrt{12}) &= -\frac{27\cdot\sqrt{3^3}}{148} = -5.196 \Rightarrow \text{H}(-3.464|-5.196)\\ f(\sqrt{12}) &= \frac{27\cdot\sqrt{3^3}}{148} = 5.196 \Rightarrow \text{T}(3.464|5.196)\end{aligned}$$

4. Wendepunkte, Wendetangente

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
\frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} &= 0 \\
8x^3 + 96x &= 0 \\
8x(x^2+12) &= 0 \\
8x = 0 &\vee \underbrace{x^2 + 12 = 0}_{\text{keine Lösung in } \mathbb{R}} \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Überprüfung, ob an der Stelle $x = 0$ wirklich ein Wendepunkt vorliegt:

$$
\begin{aligned}
f'''(0) &\neq 0 \\
\frac{-24(0 + 24 \cdot 0 + 16)}{(0-4)^4} = \frac{-24 \cdot 16}{(-4)^4} &= \frac{-384}{256} \neq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ W$(0|0)$
Wendetangente: Berechnung des Anstiegs:

$$
\begin{aligned}
k &= f'(x_W) \\
f'(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= kx + d \\
0 &= 0 + d \\
d &= 0
\end{aligned}
$$

Gleichung der Wendetangente: $t_W : y = 0 \ldots$ x-Achse
$\Rightarrow$ Sattelpunkt

5. Monotonie- und Krümmungsverhalten
In den Extremstellen ändert sich das Monotonieverhalten auf jeden Fall. Die Polstellen sind ebenfalls zu betrachten.

	$-\infty < x < -\sqrt{12}$	$-\sqrt{12}$	$-\sqrt{12} < x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$2 < x < \sqrt{12}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{12} < x < \infty$
f'(x)	> 0	0	< 0	-	< 0	-	< 0	0	> 0
f(x)	streng monoton steigend	H	streng monoton fallend	Pol	streng monoton fallend	Pol	streng monoton fallend	T	streng monoton steigend

Das Krümmungsverhalten kann nur an "definierten" Stellen festgestellt werden. Die nichtdefinierten Stellen (Unendlichkeitsstellen) schließt man aus. Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten auf jeden Fall. Im Bereich der Polstellen ist eine Änderung des Krümmungsverhaltens möglich.

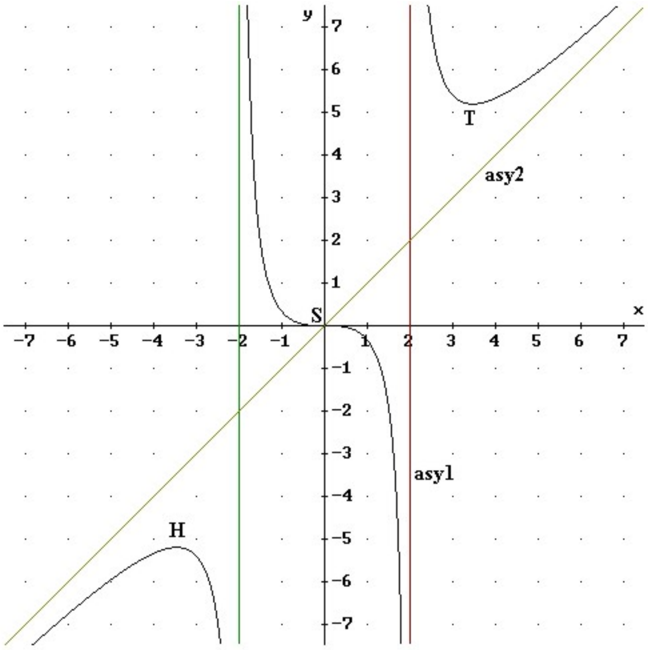
	$-\infty < x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
f"(x)	< 0	-	> 0	0	< 0	-	> 0
f(x)	negativ gekrümmt (rechts gekrümmt)	Pol	positiv gekrümmt (links gekrümmt)	W	negativ gekrümmt (rechts gekrümmt)	Pol	positiv gekrümmt (links gekrümmt)

6. Verhalten im Unendlichen Wir untersuchen den Verlauf des Graphen der Funktion im Unendlichen, indem wir den $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ betrachten.
   Durch Polynomdivision der unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ erhalten wir die in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegte Funktion $f(x) = x + \frac{4x}{x^2-4}$:

$$\begin{aligned} x^3 : (x^2-4) &= x \\ -x^3 \mp 4x & \\ 0 \qquad 4x \text{ Rest} & \end{aligned}$$

   Für $x \longrightarrow \pm\infty$ nähert sich die gegebene Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ der Funktion $f(x) = x$, da $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = 0$ gilt. $f(x) = x$ ist daher eine Asymptote im Unendlichen (2. Art).

7. Graph



8. Symmetrie
   Aus dem Graphen erkennt man, dass die Funktion punktsymmetrisch bezüglich des Wendepunktes ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ f(x) &= \frac{x^3}{x^2-4} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3}{x^2-4} \\ -f(-x) &= -\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{x^3}{x^2-4} \qquad \text{w.z.z.w.} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$ und zeichne den Graphen im Intervall $[-6; 6]$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3-x^2}{x^2-4} \quad \text{(Quotientenregel)} \\
f'(x) &= \frac{(-2x)\cdot(x^2-4)-(3-x^2)\cdot(2x)}{(x^2-4)^2} = \\
&= \frac{-2x^3+8x-6x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{2x}{(x^2-4)^2} \\
f''(x) &= \frac{2\cdot(x^2-4)^2-2x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \\
&= \frac{2x^2-8-8x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-6x^2-8}{(x^2-4)^3} \\
f'''(x) &= \frac{(-12x)(x^2-4)^3+(6x^2+8)3(x^2-4)^2\cdot 2x}{(x^2-4)^6} = \\
&= \frac{-12x^3+48x+36x^3+48x}{(x^2-4)^4} = \frac{24x^3+96x}{(x^2-4)^4}
\end{aligned}
$$

1. Definitionsmenge

$$f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$$

Die Funktion ist für die Nullstellen des Nenners nicht definiert:

$$
\begin{aligned}
(x^2-4) &= 0 \\
(x+2)(x-2) &= 0 \\
x &= 2 \lor x = -2
\end{aligned}
$$

D=$\mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$
Die Funktions besitzt zwei Polstellen.

2. Nullstellen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\frac{3-x^2}{x^2-4} &= 0 \\
x^2 &= 3 \\
x &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$N_1(-\sqrt{3}|0)$ $N_2(\sqrt{3}|0)$

3. Extremwerte

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{2x}{(x^2-4)^2} &= 0 \\
2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Nachweis und Art des Extremums:

$$f''(0) = \frac{-8}{(-4)^3} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$
$$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \mathrm{T}(0|-\frac{3}{4})$$

4. Wendepunkte, Wendetangente

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{-6x^2-8}{(x^2-4)^3} = 0$$
$$-6x^2 - 8 = 0$$
$$-6x^2 = 8$$
$$x^2 = -\frac{4}{3} \qquad \text{keine Lösung in } \mathbb{R}$$

Kein Wendepunkt!

5. Monotonie- und Krümmungsverhalten
In den Extremstellen ändert sich das Monotonieverhalten auf jeden Fall. Die Polstellen sind ebenfalls zu betrachten.

	$-\infty < x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
f'(x)	< 0	-	< 0	0	> 0	-	> 0
f(x)	streng monoton fallend	Pol	streng monoton fallend	T	streng monoton steigend	Pol	streng monoton steigend

Das Krümmungsverhalten kann nur an "definierten" Stellen festgestellt werden. Die nichtdefinierten Stellen (Unendlichkeitsstellen) schließt man aus. Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten auf jeden Fall. Im Bereich der Polstellen ist eine Änderung des Krümmungsverhaltens möglich.

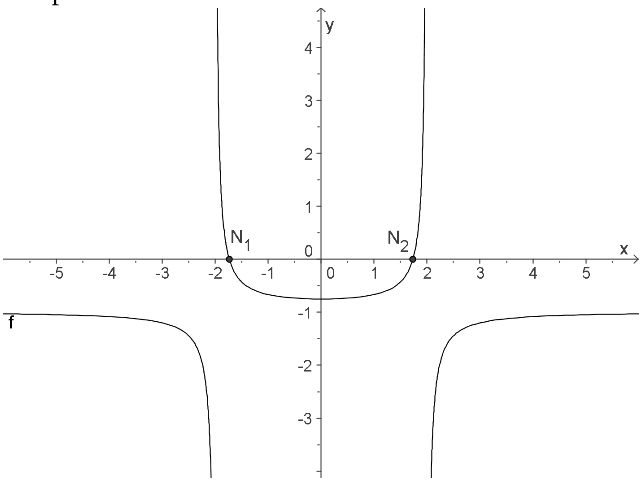
	$-\infty < x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
f"(x)	< 0	-	> 0	-	< 0
f(x)	negativ gekrümmt (rechts gekrümmt)	Pol	positiv gekrümmt (links gekrümmt)	Pol	negativ gekrümmt (rechts gekrümmt)

6. Verhalten im Unendlichen Wir untersuchen den Verlauf des Graphen der Funktion im Unendlichen, indem wir den $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ betrachten.
Durch Polynomdivision der unecht gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$ erhalten wir die in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegte Funktion $f(x) = -1 - \frac{1}{x^2-4}$:

$$(-x^2+3) : (x^2-4) = -1$$
$$-x^2+4$$
$$0 \qquad -1 \text{ Rest}$$

Für $x \to \pm\infty$ nähert sich die gegebene Funktion $f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$ der Funktion $f(x) = -1$, da $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$ gilt. $f(x) = x$ ist daher eine Asymptote im Unendlichen (2. Art).

7. Graph



8. Symmetrie
   Vermutung: symmetrisch zur y-Achse:

$$f(x) = f(-x)$$
$$f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$$
$$f(-x) = \frac{3-(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{3-x^2}{x^2-4} \qquad \text{w.z.z.w.}$$