# Kurvendiskussion

Mag. Mone Denninger

10. Oktober 2004

## Inhaltsverzeichnis

Die mathematische Untersuchung des Graphen einer Funktion heißt **Kurvendiskussion**.

# 1 Definitionsmenge

Zuerst gilt es die maximale Definitionsmenge zu bestimmen. Bei ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktiontn) ist dies einfach ($D = \mathbb{R}$), bei gebrochen rationalen Funktionen ist auf die Nullstellen des Nennerpolynoms zu achten.

## 1.1 Verhalten am Rand und an den Lücken des Definitionsbereichs

Hier kommt die Grenzwertrechnung zur Anwendung. Für $\lim_{x \to x_0} f(x)$ beachte man den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert (Limes).
Die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ liefern bei gebrochen rationalen Funktionen oft schräge Asymptoten. Dazu ist die gebrochen rationale Funktion (falls noch nicht so gegeben) durch Polynomdivision in eine ganzrationale Darstellung mit Rest zu verwandeln. (Beispiel: Die Funktion $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ hat die schräge Asymptote mit der Gleichung $y = x - 1$)

# 2 Nullstellen

Nullstellen zu berechnen ist mit den Standardverfahren möglich. Bei den von uns betrachteten Funktionen kommt die Polynomdivision oft zur Anwendung. Wir beachten insbesondere, dass ein Bruch null wird, wenn der Zähler null ist! Bei ganzrationalen Funktionen liefert die Vielfachheit einer Nullstelle bereits wichtige Aussagen über die Funktion!

# 3 Extremwerte (=Lokale Extrema)

Punkte mit waagrechter Tangente sind Punkte, bei denen die Ableitung verschwindet (Null ist).
Solche Punkte können Tiefpunkt, Hochpunkt, Wendepunkt oder Sattelpunkt (Terrassenpunkt) sein.
Die Art der lokalen Extrema lässt sich mit Hilfe des Monotonieverhaltens von $f(x)$ oder mit folgendem Kriterium:

Sei $x_0$ eine Stelle von $f(x)$ mit waagrechter Tangente, d.h. also mit $f'(x_0) = 0$.

- Ist $f''(x_0) > 0$ und $f''(x)$ stetig an der Stelle $x_0$, so hat der Graph der Funktion an der Stelle $x_0$ einen (lokalen) Tiefpunkt.
- Ist $f''(x_0) < 0$ und $f''(x)$ stetig an der Stelle $x_0$, so hat der Graph der Funktion an der Stelle $x_0$ einen (lokalen) Hochpunkt.

# 4 Wendepunkt - Flachpunkt

Flachpunkte sind Punkte, bei denen die zweite Ableitung verschwindet (dort liegt keine Krümmung vor, also verläuft der Graph “flach”).
Beachte: Hat der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0$ einen Wendepunkt, so ist $f''(x_0) = 0$. Die Umkehrung ist falsch.
Hinreichendes Kriterium für Wendepunkt: Ist $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ und $f'''(x)$ stetig an der Stelle $x_0$, so hat der Graph von $f(x)$ an der Stelle $x_0$ einen Wendepunkt.

## 4.1 Sattelpunkt

Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn bei einem Wendepunkt eine waagrechte Tangente vorhanden ist.

## 4.2 Wendetangente

Die Wendetangente ist die Tangente an die Funktion $f(x)$ im Wendepunkt. Die Steigung kann durch die erste Ableitung $f'(x_W)$ berechnet werden.

# 5 Monotonieverhalten

Ursprüngliche Definition: Eine Funktion $f(x)$ ($x \in D_f$) heißt streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), wenn mit zunehmendem $x$ der Funktionswert $f(x)$ zunimmt (bzw. abnimmt), d.h. wenn für alle $x_1, x_2 \in D_f$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bzw. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).
Es gilt allgemein: Hat eine im Intervall $[a; b]$ stetige und wenigstens im

Inneren des Intervalls differenzierbare Funktion $f(x)$ für alle $x \in ]a;b[$ die Ableitung $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$), so ist $f(x)$ in $[a;b]$ streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend).

# 6 Krümmungsverhalten

Zum Krümmungsverhalten vom Graphen im Intervall $I$:

- $f''(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow$ der Graph ist in $I$ rechtsgekrümmt
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow$ der Graph ist in $I$ linksgekrümmt

Eselsbrücke:

- $f''$ negativ $\Rightarrow$ der Graph ist rechtsgekrümmt
- $f''$ positiv $\Rightarrow$ der Graph ist linksgekrümmt

Ein Wendepunkt liegt vor, wenn sich das Krümmungsverhalten, also das Vorzeichen von $f''(x)$ ändert. Das Vorzeichenverhalten von $f''(x)$ untersucht man mit einer Tabelle analog zum Vorzeichenverhalten von $f'(x)$ bei den lokalen Extrema.

# 7 Symmetrie zum Koordinatensystem

Die Symmetrie zum Koordinatensystem ist wie folgt zu untersuchen:

- Ist $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathrm{D}_f$, so ist der Graph der Funktion **achsensymmetrisch zur $y$-Achse** ($f$ heißt dann gerade).
- Ist $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathrm{D}_f$, so ist der Graph der Funktion **punktsymmetrisch zum Ursprung** ($f$ heißt dann ungerade).

Achsensymmetrie zu einer beliebigen Achse bzw. Punktsymmetrie zu einem beliebigen Punkt ist nicht so einfach zu zeigen. Zur Wiederholung sei angemerkt (mit einem $h > 0$):

- Ist $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$, so ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch zur Achse $x = x_0$.
- Ist $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2y_0$, so ist der Graph der Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(x_0|y_0)$.

# 8 Skizzieren des Graphen

Beachten Sie stets die Informationen, die Sie bereits durch Rechnung erhalten haben:

- Definitionsmenge bzw. vorgeschriebenen Bereich einhalten
- Symmetrie beachten
- Asymptoten einzeichnen
- Schon berechnete Nullstellen eintragen
- Lokale Extrema eintragen. (Kleine waagrechte Striche als angedeutete Tangentenstücke erleichtern das Zeichnen. Keine Spitzen an diesen Stellen!)
- Wendepunkt beachten, evtl. auch Wendetangente

1. Umfassende Definitionsmenge, Polstellen und Lücken, Asymptoten
2. Nullstellen $\mathrm{f}(x) = 0$
3. Extremwerte (Hoch- und Tiefpunkte) $\mathrm{f}'(x) = 0$
   Hochpunkt: $\mathrm{f}''(x) < 0$; Tiefpunkt: $\mathrm{f}''(x) > 0$
   Sattelpunkt: $\mathrm{f}''(x) = 0$, $\mathrm{f}'''(x) \neq 0$
4. Wendepunkte, Wendetangenten $\mathrm{f}''(x) = 0$
   . $\mathrm{f}'''(x) \neq 0$
5. Monotonie $\mathrm{f}'(x) \geq$ bzw. $\leq 0$
   $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ monoton wachsend
   $\mathrm{f}'(x) \leq 0$ monoton fallend
6. Krümmungsverhalten $\mathrm{f}''(x) >$ bzw. $< 0$
   $\mathrm{f}''(x) < 0$ negative Krümmung
   $\mathrm{f}''(x) > 0$ positive Krümmung
7. Graph

**Funktion:** Eine Zuordnung f, die jedem $x$ genau ein $y$ zuweist, heißt Funktion ($y$=f$(x)$).

**Definitionsmenge:** Die Menge der Zahlen, welche $x$ annimmt bzw. annehmen soll, nennt man die Definitionsmenge $\mathrm{D}_f$ der Funktion.

**Pol:** Sofern der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion an der Stelle $x = a$ gleich null ist, ist die Funktion an der Stelle nicht definiert. Wenn nun der Zähler bei $x = a$ ungleich null ist, sagt man: Die Funktion besitzt an dieser Stelle einen sogenannten Pol (eine „Unendlichkeitsstelle“).

**Asymptote:** Unter einer Asymptote der Funktion f versteht man (etwas unexakt ausgedrückt) eine Funktion g, deren Graph sich dem Graphen von f beliebig nähert (ihn aber nie erreicht), wenn man auf beiden Graphen ins Unendliche rückt.

**Nullstelle:** Ein Wert $x$ heißt Nullstelle der Funktion f, wenn $\mathrm{f}(x) = 0$ gilt. Der Wert $x$ bezeichnet dann genau den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der $x$-Achse.

**Hochpunkt:** Als Hochpunkt (relatives Maximum) bezeichnet man jenen Punkt eines Graphen, dessen benachbarte Punkte (links und rechts von H) alle einen kleineren $y$-Wert aufweisen. Die Tangente in H verläuft parallel zur $x$-Achse; sie hat die Steigung $k = 0$.

**Tiefpunkt:** Als Tiefpunkt (relatives Minimum) bezeichnet man jenen Punkt eines Graphen, dessen benachbarte Punkte (links und rechts von T) alle einen größeren $y$-Wert aufweisen. Die Tangente in T verläuft parallel zur $x$-Achse; sie hat die Steigung $k = 0$.

**Wendepunkt:** Der Wendepunkt ist jene Stelle der Funktion f, in der sich das Krümmungsverhalten ändert.

**Wendetangente:** Die Tangente im Wendepunkt nennt man Wendetangente.

**Sattelpunkt:** Ein Wendepunkt mit zur $x$-Achse paralleler Tangente heißt Sattelpunkt.