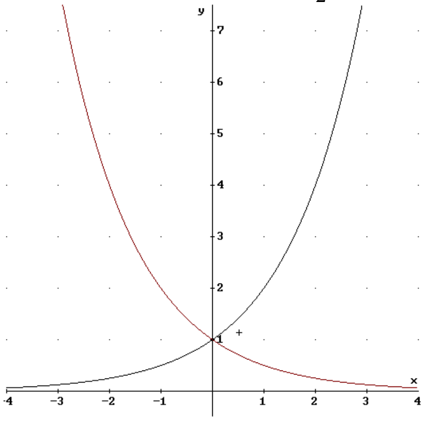
1 Exponentialfunktion

Definition 1.1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$) nennt man Exponentialfunktion.

a . . . Basis z.B.: $y = 2^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$



x . . . Exponent

Eigenschaften:

- sämtliche Funktionswerte sind positiv
- die Funktion ist nach oben unbeschränkt
- für $a > 1$: streng monoton wachsend
- für $a = 1$: konstante Funktion
- für $0 < a < 1$: streng monoton fallend
- $y = a^x$ und $y = (\frac{1}{a})^x$ sind symmetrisch zur y-Achse

Besondere Basis: EULER'SCHE Zahl ($e \approx 2.718$**)**

$$y = e^x \qquad \text{natürliche Exponentialfunktion}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\ldots \qquad \text{(irrationale Zahl)}$$

(e ergibt sich, wenn man ein Kapital bei einem jährlichen Zinssatz von p=100% stetig verzinst: $K_1 = eK_0$)

2 Logarithmus und Logarithmusfunktion

Definition 2.1.

$$b = a^x (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}; b \in \mathbb{R}^+)$$

Die Lösung dieser Gleichung nennt man den Logarithmus von b zur Basis a; b heißt Numerus.
Der Logarithmus von b zur Basis a ist jene Hochzahl, mit der man a potenzieren muß, um b zu erhalten.

$$\text{Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus} \qquad (b = a^{\log_a b})$$

Beispiel 2.2.

$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$
$$2^{-3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{8} = -3$$

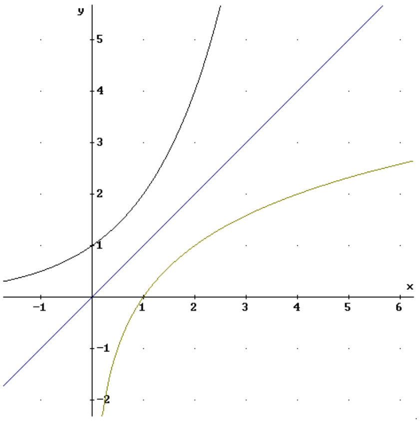
Logarithmieren und Potenzieren sind Umkehroperationen.

Logarithmusfunktion:

$$y = \log_a x \qquad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}; x \in \mathbb{R}^+$$

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Ihr Graph ist die Spiegelung der Exponentialfunktion an der 1. Mediane.

z.B.: $y = 2^x$, $y = \log_2 x$



Eigenschaften:

- Die Funktion ist nur für positive Zahlen definiert
- Die Funktion ist nach unten und oben unbeschränkt
- für $a > 1$: streng monoton wachsend
- für $0 < a < 1$: streng monoton fallend

Besondere Basen:

dekadischer Logarithmus ($\lg x$) Basis 10

natürlicher Logarithmus ($\ln x$) Basis e

Rechnen mit dem Logarithmus:

- $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a u^r = r \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[r]{u} = \frac{1}{r} \log_a u$

Beispiel 2.3. $\log\left(5x^2 \cdot \frac{\sqrt{y}}{z^6}\right) = \left(\log 5 + 2\log x + \frac{1}{2}\log y\right) - 6\log z$

Beispiel 2.4. $2\log 5 - \frac{1}{2}(\log a + 2\log b) = \log \frac{5^2}{\sqrt{ab^2}}$

Umrechnung von $\lg x$ in $\log_a x$: $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$

3 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Exponentialgleichungen:

- beide Seiten auf die gleiche Basis bringen → Exponenten sind gleich
- beide Seiten auf den gleichen Exponenten bringen → Exponent ist 0
- beide Seiten werden logarithmiert

logarithmische Gleichungen: Achtung auf D!