Eine nachträgliche Begründung, warum das Differenzieren „funktioniert“

Mag. Mone Denninger

10. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Mittlere Änderungsrate einer Funktion (= Differenzenquotient)

Wir veranschaulichen die mittlere Änderunghsrate einer Funktion anhand eines Beispiels:

Uhrzeit	Temperatur in °C
8	9
10	10
12	13
14	17
16	14
18	13

(a) Berechne die Temperaturänderung in den Intervallen $[8;12]$, $[14;16]$ und $[12;14]$:

$$\begin{aligned} [8;12] &= T(12) - T(8) = 13 - 9 = 4°\text{C} \\ [14;16] &= T(16) - T(14) = 14 - 17 = -3°\text{C} \\ [12;14] &= T(14) - T(12) = 17 - 13 = 4°\text{C} \end{aligned}$$

(b) In welchem der drei Zeitintervalle wächst die Temperatur am stärksten?

$$\begin{aligned} \frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} &= \frac{4}{4} = 1°\text{C/h} \\ \frac{T(14) - T(12)}{14 - 12} &= \frac{4}{2} = 2°\text{C/h} \end{aligned}$$

Im Intervall $[12;14]$ wächst die Temperatur am stärksten.

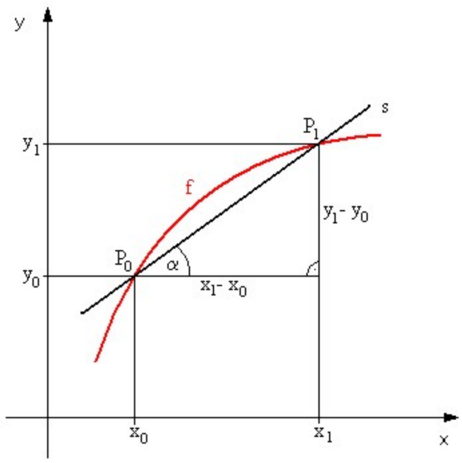
(c) Gib allgemein die Geschwindigkeit der Temperaturänderung im Intervall $[a;b]$ an:

$$\frac{T(b) - T(a)}{b - a}$$

Es sei f eine reelle Funktion. Dann heißt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der **Differenzenquotient** von f in $[a;b]$ oder die mittlere Änderungsrate der Funktion in $[a;b]$.



Geometrisch entspricht der Differenzenquotient dem Anstieg k der Sekante s. Man schreibt für die Differenz $y_1 - y_0$ kurz Δy und für $x_1 - x_0$ kurz Δx.
Steigung der Sekante:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzenquotient

Beispiel 1. Wir berechnen die mittlere Änderung einer Geraden im Intervall $[1; 4]$:
$f(x) = kx + d$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4k + d) - (k + d)}{3} = \frac{3k}{3} = k$$

Die mittlere Änderung einer linearen Funktion ist ihre Steigung k!

Beispiel 2 (52). Es ist zu begründen, weshalb die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ keinen Grenzwert erreicht, wenn x gegen Null strebt.

Beispiel 3 (53efgh). Die folgenden Grenzwerte sind zu ermitteln:

53abcd
54

Beispiel 4 (55b). Der Grenzwert ist gesucht:

55a

Beispiel 5 (56). Gegeben ist die Potenzfunktion $f(x) = x^0$.

(a) Wie lautet die (maximale) Definitionsmenge, wie die zugehörige Wertemenge?

(b) Stimmt die Funktion $f(x) = x^0$ mit der Funktion $f(x) = 1$ überein?

(c) Die Behauptung „Wenn eine durch die Gleichung festgelegte Funktion einen Grenzwert besitzt, ist sie auch stetig“ ist im Hinblick auf $f(x) = x^0$ zu überdenken. Ist $f(x) = x^0$ eine stetige Funktion?

Man sagt $f(x) = x^0$ hat an der Stelle 0 eine Lücke.

Beispiel 6 (57). (a) Unter welchen zwei Gegebenheiten ist eine Funktion an der Stelle $x = a$ stetig?

(b) Unter welchen Umständen ist eine Funktion im Intervall I stetig?

58

1.1 Begriff der Stetigkeit und der Unstetigkeitsstelle

(Zeichnen ohne abzusetzen)
Die meisten Funktionen, die in den Anwendungen vorkommen, sind **stetig**, d.h.: bei kleinen Änderungen des Arguments einer stetigen Funktion $f(x)$ ändert sich diese auch nur geringfügig. Die graphische Darstellung einer solchen Funktion ergibt eine zusammenhängende Kurve. Ist dagegen die Kurve an verschiedenen Stellen unterbrochen, dann heißt die zugehörige Funktion **unstetig** und die Werte des Arguments, an denen die Unterbrechung auftritt, heißen **Unstetigkeitsstellen**.

Linksseitige Stetigkeit in a: Eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervall $(b;a]$ mit $b < a$ definiert ist, heißt in a linksseitig stetig, wenn der linksseitige Grenzwert $L = \lim_{x \to a-} f(x)$ existiert[1] und $L = f(a)$ ist.

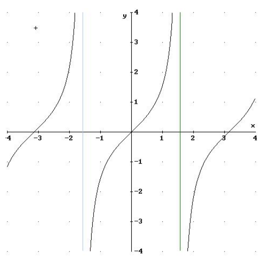
Rechtsseitige Stetigkeit in a: Eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervall $[a;b)$ mit $a < b$ definiert ist, heißt in a rechtsseitig stetig, wenn der rechtsseitige Grenzwert $R = \lim_{x \to a+} f(x)$ existiert und $R = f(a)$ ist.

Stetigkeit in a: Existieren bei einer Funktion $f(x)$ die beiden Grenzwerte R und L und stimmen sie mit dem Funktionswert $f(a)$ überein, so heißt f in a **stetig**.

Beispiel 7. $f(x) = x^2$ ist überall stetig; wir zeigen dies für $a = 3$:

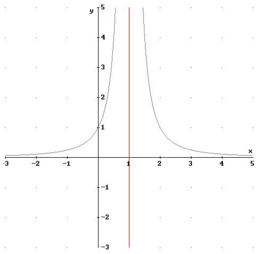
$$L = \lim_{x \to 3-} x^2 = 9$$
$$R = \lim_{x \to 3+} x^2 = 9$$
$$L = R$$

$f(x) = \tan x$ ist in $k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) unstetig.



$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$$
$$R = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$$
$$L \neq R$$

[1]. . . Ein Grenzwert existiert, wenn er endlich ist.



$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ist an der Stelle $x = 1$ unstetig.

$$L = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$
$$R = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Es existieren keine unendlichen Grenzwerte!

Stetige Behebung einer Definitionslücke: Gehört a nicht zum Definitionsbereich, existieren aber $L = \lim_{x \to a-} f(x)$ und $R = \lim_{x \to a+} f(x)$ und gilt $L = R$, so kann $f(x)$ durch die Zusatzdefinition $f(x) := L = R$ stetig in a fortgesetzt werden ("stetige Behebung einer Definitionslücke").

Beispiel 8 (59a). Gegeben ist die ...

59b

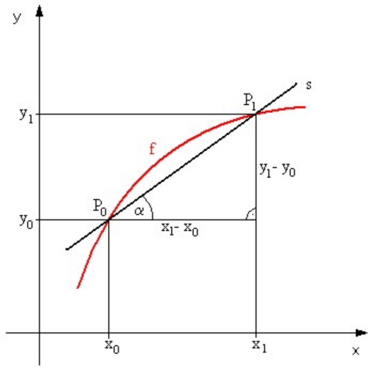
Es folgen Beispiel 60 - 64!!!

1.2 Arbeiten mit Grenzwertsätzen

Beispiel 9 (65).

(a) Differenzenquotient = $\frac{\text{Funktionswertänderung}}{\text{zugehörige Argumentwertänderung}}$

Wie könnte man – im Hinblick auf die nebenstehende Figur – die Funktionswert- und die Argumentwertänderung kurz und prägnant beschreiben?



(b) Darf im Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch Δ gekürzt werden? (Begründung!)

(c) Wie groß ist der Anstieg der Geraden, die durch die Punkte $P_0(5|6)$ und $P_1(-7|0)$ gelegt wird?

(d) Mit welchen Formeln können wir den Anstieg einer linearen Funktion berechnen?

(e) Wieso ist $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ äquivalent zu $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$?

(f) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch $P(3|4)$ geht und deren Steigungswinkel $\alpha = 45°$ ist?

(g) Wie könnte man eine Sekante einer Kurve definieren?

(h) Für welche linearen Funktionen ist der Anstieg $k = 0$?

LÖSUNG:

(a) Die Funktionswertänderung als Differenz der Funktionswerte an den Stellen y_1 und y_0; die Argumentwertänderung als Differenz von x_1 und x_0.

(b) Nein, weil das Zeichen Δ keine Variable ist!

(c) $P_0(5|6)$, $P_1(-7|0)$

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0-6}{-7-5} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

(d)
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

(e)
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{(-1)(f(x_0) - f(x_1))}{(-1)(x_0 - x_1)} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

(f) $\mathrm{P}(3|4) \qquad \alpha = 45°$

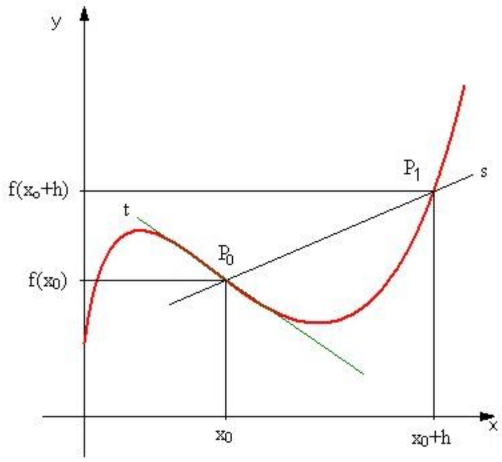
$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{AK}}$$
$$\tan\alpha = \frac{k}{1}$$
$$k = \tan 45° = 1$$
$$\mathrm{P} \in g : y = x + d$$
$$4 = 3 + d$$
$$d = 1$$
$$\underline{\underline{g : y = x + 1}}$$

(g) Eine Sekante einer Kurve heißt jene Gerade, welche die Kurve in mindestens 2 Punkten schneidet.

(h) Für konstante Funktionen (parallel zur x-Achse).

66

2 Der Differentialquotient (= Ableitung)



t . . . Tangente in P_0
s . . . Sekante durch P_0 und P_1

Wandert der Punkt P_1 immer näher an P_0 heran, so wird der Abstand zwischen x_0 und $x_0 + h$ immer kleiner (h geht also gegen 0) und aus der Sekante s wird eine Tangente t an die Kurve im Punkt P_0.
Steigung der Tangente im Punkt P_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

Differentialquotient (= 1. Ableitung) der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

Existiert dieser Grenzwert, dann heißt f in dem Punkt x_0 differnzierbar.

Beispiel 10. Ein Beispiel, dem man entnehmen kann, dass die Ableitung von $f(x) = cx$ (mit Konstante $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) gleich $f'(x) = c$ ist.

$$\begin{aligned} f(x) &= cx \\ f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot (x_0 + h) - c \cdot x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{cx_0 + ch - cx_0}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ch}{h} = \lim_{h \to 0} c = \\ &= c \end{aligned}$$

Beispiel 11. Wir bilden die erste Ableitung von $f(x) = x^2$ mit Hilfe des Differentialquotienten (mittels Grenzübergang):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

Beispiel 12 (73). Beweis der Produktregel:
Sind die Funktionen u und v an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion $u \cdot v$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} = \quad \text{TRICK!!} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{v(x)\left[u(x) - u(x_0)\right] + u(x_0)\left[v(x) - v(x_0)\right]}{x - x_0} = \\
&= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Es folgen Beispiele 74 - 92!!!

Beispiel 13 (93a). $y = x^3$, $y' = 3x^2$; differenziert man y' nochmals, so erhält man die **zweite Ableitung** von $y = x^3$. Sie wird mit y'' bezeichnet: $y'' = 6x$. Analog gibt es eine dritte, vierte, n-te Ableitung: $y''' = 6$, $y^{iv} = 0$. Ab der zweiten Ableitung spricht man von sogenannten **höheren Ableitungen**. Man ermittle die zweite und dritte Ableitung der folgeden, durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen:
(a) $y = x^8$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^8 \\ f'(x) &= 8x^7 \\ f''(x) &= 56x^6 \\ f'''(x) &= 336x^5 \end{aligned}$$

93bf

Beispiel 14 (94). An welcher Stelle x_0 der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 15x^2 + 4x + 3$ ist $f''(x) = 0$?

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 15x^2 + 4x + 3 \\ f'(x) &= 3x^2 - 30x + 4 \\ f''(x) &= 6x - 30 \\ 6x_0 - 30 &= 0 \\ 6x_0 &= 30 \\ x_0 &= 5 \end{aligned}$$

95

Beispiel 15 (96a). Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Gesucht sind die Koeffizienten a, b, c und d, wenn folgendes bekannt ist:
$f(0) = -1$, $f'(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f''(2) = 10$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) = -1: &\quad d = -1 \\ f'(1) = 2: &\quad 3a + 2b + c = 2 \\ f(2) = 5: &\quad 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ f''(2) = 10: &\quad 12a + 2b = 10 \end{aligned}$$

96b
97a

2.1 Partielle Ableitungen

Beispiel 16 (101). In dieser Aufgabe sind die Größen m und v der Formel $E = \frac{mv^2}{2}$ gleichzeitig variabel. Man kann nun E' bilden, indem man nur nach einer der Variablen differenziert und die zweite konstant hält:

$$\frac{dE}{dm} = \frac{v^2}{2} \text{ bzw. } \frac{dE}{dv} = mv$$

Man spricht in diesem Fall von **partiellen Ableitungen**. 101

Beispiel 17. $f(a,b) = 5a^2 + 3ab + b^4$
Zuerst die partielle Ableitung nach a. Dafür betrachten wir die Variable b als konstant. Daher:

$$\frac{df}{da} = 5 \cdot 2 \cdot a + 3 \cdot b + 0 = 10a + 3b$$

Jetzt die partielle Ableitung nach b (betrachten a als konstant):

$$\frac{df}{db} = 0 + 3 \cdot a + 4b^3 = 3a + 4b^3$$

Eine Funktion hat immer so viele partielle Ableitungen, wie sie Variablen hat.

Beispiele 102 - 104 folgen!