Kettenregel

Eine Funktion g sei an der Stelle x_0 und eine Funktion f sei an der Stelle $g\left(x_0\right)$ differenzierbar. Unter dieser Voraussetzung ist auch die verknüpfte Funktion $f\left(g\left(x\right)\right)$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(f\left(g\left(x_0\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x_0\right)\right) \cdot g'\left(x_0\right)$$

Beweis: Zur Vereinfachung setzt man $y = g\left(x\right)$ und $z = f\left(y\right)$. Da $g'(x_0)$ und $f'(g(x_0))$ existieren, gilt

$$g'\left(x_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{g\left(x\right) - g\left(x_0\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{(innere Ableitung)}$$
$$f'\left(y_0\right) = \lim_{y \to y_0} \frac{f\left(y\right) - f\left(y_0\right)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{z - z_0}{y - y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \quad \text{(äußere Ableitung)}$$

Zu zeigen: $f'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

$$\begin{aligned}
f'\left(x_0\right) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(g\left(x\right)\right) - f\left(g\left(x_0\right)\right)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\
&= f'(y_0) \cdot g'(x_0) = \\
&= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Produktregel

Sind die Funktionen u und v an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion $u \cdot v$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(u \cdot v\right)'\left(x_0\right) = u'\left(x_0\right) \cdot v\left(x_0\right) + u\left(x_0\right) \cdot v'\left(x_0\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(u \cdot v\right)'\left(x_0\right) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u\left(x\right) \cdot v\left(x\right) - u\left(x_0\right) \cdot v\left(x_0\right)}{x - x_0} = \quad \text{TRICK!!} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u\left(x\right) \cdot v\left(x\right) - u\left(x_0\right) \cdot v\left(x\right) + u\left(x_0\right) \cdot v\left(x\right) - u\left(x_0\right) \cdot v\left(x_0\right)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{v\left(x\right)\left[u\left(x\right) - u\left(x_0\right)\right] + u\left(x_0\right)\left[v\left(x\right) - v\left(x_0\right)\right]}{x - x_0} = \\
&= u'\left(x_0\right) \cdot v\left(x_0\right) + u\left(x_0\right) \cdot v'\left(x_0\right) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Quotiententregel

Sind die Funktionen u und v an der Stelle x_0 differenzierbar und gilt $v(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion $u \cdot v$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) &= \left(u(x_0) \cdot \left[v(x_0)\right]^{-1}\right)' = \qquad \text{(Produktregel und Kettenregel)} \\
&= u'(x_0) \cdot \left[v(x_0)\right]^{-1} + u(x_0) \cdot (-1) \cdot \left[v(x_0)\right]^{-2} \cdot v'(x_0) = \\
&= \left[v(x_0)\right]^{-2} \cdot \left[u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)\right] = \\
&= \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$