Aussagen

Aussagen Eine Aussage kann eine Eigenschaft für ein einzelnes, konkretes Objekt behaupten:

verbale Aussage	formale Aussage	Wahrheitswert
1) “201 ist teilbar durch 3”	“$3 \mid 201$”	wahre Aussage (w.A.)
2) “π ist kleiner als 3”	“$\pi < 3$”	falsche Aussage (f.A.)

Eine Aussage kann eine Eigenschaft aber auch für mehrere Objekte gleichzeitig behaupten. Die Gesamtheit dieser Objekte nennt man die **Grundmenge G** der Aussage. Solche Aussagen formuliert man mittels **Variablen** und **Quantoren**[1]. Dabei unterscheidet man zwischen zwei Typen:

Allaussagen	**Existenzaussagen**
3) “**Alle** ganzen Zahlen sind durch 1 teilbar” formal: $\forall x \in \mathbb{Z} : 1 \mid x$ (w.A.)	4) “**Es gibt eine** ganze Zahl zwischen 242 und 250, die Primzahl ist” formal: $\exists x \in \mathbb{Z}, 242 < x < 250 : x \in \mathbb{P}$ (f.A.)
5) “**Alle** ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar” formal: $\forall x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x$ (f.A. – Gegenbeispiel: $x = 4$)	6) “**Es gibt eine** ganze Zahl zwischen 342 und 350, die Primzahl ist” formal: $\exists x \in \mathbb{Z}, 342 < x < 350 : x \in \mathbb{P}$ (w.A. – Beispiel: $x = 347$)
allgemein: “**Alle** x von G haben die Eigenschaft $a(x)$” formal: $\forall x \in G : a(x)$	allgemein: “**Es gibt mindestens ein**[2] x von G mit der Eigenschaft $a(x)$” formal: $\exists x \in G : a(x)$

Bemerkungen:

1. Will man ausdrücken, daß **genau ein** Element von G die angegebene Eigenschaft besitzt, so verwendet man das Symbol “$\exists!$”. Demgemäß ist die Aussage “$\exists! x \in \mathbb{Z}, 342 < x < 350 : x \in \mathbb{P}$” falsch, weil neben 347 eine weitere ganze Zahl zwischen 342 und 350 — nämlich 349 — existiert, welche die Eigenschaft “ist Primzahl” besitzt.

2. In Verallgemeinerung von Aussage 5) und 6) gilt:

   - Eine Allaussage ist als falsch entlarvt, wenn man auch nur ein einziges **Gegenbeispiel** angeben kann. Man sagt: Die Allaussage wurde **falsifiziert**.
   - Eine Existenzaussage ist als wahr bestätigt, wenn man auch nur ein einziges **Beispiel** angeben kann. Man sagt: Die Existenzaussage wurde **verifiziert**.

[1] quantus (lat.) bedeutet “wieviel”

Der Nachweis dafür, daß eine Allaussage wahr bzw. eine Existenzaussage falsch ist, ist meist wesentlich schwieriger.

3. Allquantoren und Existenzquantoren kann man auch kombinieren: So heißt etwa "$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y > x$" in Worten: "Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es (mindestens) eine natürliche Zahl y, die größer ist als x." Mit dieser jedoch komplizierten Formulierung drückt man aus, daß es keine größte natürliche Zahl gibt.

4. Aus "Bequemlichkeit" werden oftmals die Quantoren weggelassen oder in einer kürzeren Form geschrieben: So ist das Gesetz $a + b = b + a$ eine Allaussage und müßte korrekterweise in der Form $\forall a, b \in \mathbb{R} : a+b = b+a$ oder in der Kurzschreibweise $a + b = b + a, a, b \in \mathbb{R}$ (lies: $a + b = b + a$ wobei a und b beliebig wählbare Elemente von $\mathbb{R}$ sind) geschrieben werden. Ebenso ist die Gleichung $x + 4 = 5$ genaugenommen eine Existenzaussage: wir behauptenm daß es (mindestens) eine (uns noch unbekannte) Zahl gibt, welche die Gleichung erfüllt.

Negation von Aussagen Wie jede andere Wissenschaft bemüht sich auch die Mathematik, wahre Aussagen zu machen. Die Aussagen 2), 4) und 5) sind jedoch falsch. Mit anderen Worten: Ihr "Gegenteil" ist jeweils wahr.

Das logische Gegenteil einer Aussage a nennt man ihre **Negation**[3] ("Verneinung") bzw. Gegenaussage, und schreibt dafür $\neg a$ (lies: "non a" bzw. "nicht a")[4].

Aussage a	**Gegenaussage** $\neg a$
2) "π ist kleiner als 3" formal: $\pi < 3$	π ist **nicht** kleiner als 3" formal: $\pi \not< 3$ bzw. $\pi \geq 3$ oder gleichbedeutend: ??? Fehlt da was ???
4) "**Es gibt eine** ganze Zahl zwischen 242 und 250, welche eine Primzahl ist" formal: $\exists x \in \mathbb{Z}, 242 < x < 250 : x \in \mathbb{P}$	"**Für alle** ganzen Zahlen zwischen 242 und 250 gilt, daß sie **nicht** Primzahlen sind" formal: $\forall x \in \mathbb{Z}, 242 < x < 250 : x \notin \mathbb{P}$
5) "**Alle** ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar" formal: $\forall x \in \mathbb{Z} : 3\|x$	"**Nicht alle** ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar" formal: $\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : 3\|x)$ oder gleichbedeutend: "**Es gibt mindestens eine** ganze Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist" formal: $\exists x \in \mathbb{Z} : \neg(3\|x)$

[3] negare (lat.) … verneinen.
[4] Statt $\neg a$ schreibt man auch a'.

Bemerkungen:

1. Ersichtlich gibt es verschiedene Möglichkeiten Aussagen formal zu verneinen:
   - Durch Voranstellen des **Negationssymbols** "$\neg$"
   - Durch "Durchstreichen" von Symbolen ($\notin$, $\not|$, $\ldots$)
   - Durch Verwenden der "gegenteiligen" Eigenschaft (Man ersetzt z. B. "$<$" durch "$\geq$")
2. In Verallgemeinerung der Überlegungen zu den Aussagen 4) und 5) gilt:
   - Die Negation einer Allaussage führt zu einer Existenzaussage bezüglich der gegenteiligen Eigenschaft $\neg a(x)$.
   - Die Negation einer Existenzaussage führt zu einer Allaussage bezüglich der gegenteiligen Eigenschaft $\neg a(x)$.
3. Die **Doppelte Verneinung** $\neg(\neg a)$ stimmt mit der ursprünglichen Aussage a überein.
   Beispiel: Die Aussage "$\neg(3 \not| 6)$" ist gleichbedeutend mit der Aussage "$(3|6)$". In Worten: "Es gilt nicht, daß 6 durch 3 nicht teilbar ist" ist gleichbedeutend mit "3 ist Teiler von 6".

Mengen

Teilmengen und Komplementärmengen Mit Existenzaussagen kann man ausdrücken, daß es (mindestens) ein Element x von G gibt, das eine bestimmte Eigenschaft $a(x)$ besitzt. Meist interessiert man sich dafür, welches Element das ist bzw. welche Elemente das sind.

Jene Elemente x der Grundmenge G, welche eine gegebene Eigenschaft $a(x)$ besitzen, bilden eine gewisse **Teilmenge** A von G:	Jene Elemente x der Grundmenge G, welche eine gegebene Eigenschaft $a(x)$ *nicht* besitzen, bilden eine gewisse **Teilmenge** A' von G:

Die Eingenschaft $a(x)$ fungiert also als Bedingung; wer die Bedingung erfüllt, gehört zur Menge A, wer die Bedingung nicht erfüllt (d.h., die "gegenteilige" Eigenschaft $\neg a(x)$ besitzt), gehört zur Menge A'. A' ist die Ergänzungsmenge (**Komplementärmenge**) von A bezüglich G, und umgekehrt.

$A = G \backslash A'$ (lies: A ist G ohne A') $A' = G \backslash A$ (lies: A' ist G ohne A)

Die Menge A kann unendlich viele Elemente (**unendliche Menge**), endlich viele Elemente (**endliche Menge**) oder sogar nur ein einziges Element (**einelementige Menge**) enthalten. Insbesondere kann A auch kein einziges Element (**leere Menge** $\{\}$) oder alle Elemente von G (**ganze Menge** G) enthalten.

Beschreiben von Teilmengen auf der Zahlengeraden Jede Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, die sich als "Abschnitt" auf der Zahlengeraden darstellen läßt, heißt **Intervall**. Intervalle werden mittels der eckigen Klammern "[" und "]" symbolisiert (z. B. $[-1; 3],]3; \infty[$).

Beim Zeichnen der Intervalle stützt man sich auf die folgende Vereinbarung:

- Randpunkte, die zur Menge gehören, werden mittels voller Punkte gekennzeichnet, Randpunkte, die nicht zu menge gehören, durch hohle Punkte ("Ringe").
- Mengen mit Rand bezeichnet man unter Bezugnahme auf die Anschauung als "abgeschlossen", Mengen ohne Rand als "offen".

Beziehungen zwischen Mengen – Beziehungen zwischen Aussagen

Gleichheit von Mengen – Äquivalenz von Aussagen

Satz 0.1 *Zwei* ***Mengen*** *A und B heißen* ***gleich****, wenn beide dieselben Elemente besitzen. Formal kennzeichnet man diesen Sachverhalt in der Form $A = B$.*

Satz 0.2 *Zwei* ***Bedingungen*** *$a(x)$ und $b(x)$ heißen* ***äquivalent****, wenn sie bezüglich derselben Grundmenge G die gleiche Teilmenge beschreiben. Formal kennzeichnet man diesen Sachverhalt mit Hilfe des* ***Äquivalenzpfeils*** *$\Leftrightarrow$ in der Form $a(x) \Leftrightarrow b(x)$, und sagt: Die Bedingung a(x) ist* ***genau dann*** *erfüllt,* ***wenn*** *(auch) die Bedingung b(x) erfüllt ist.*

Verknüpfen von Bedingungen – Verknüpfen von Mengen

Zusammenfassung der wichtigsten logischen und mengentheoretischen Verknüpfungen und ihrer Symbole Beschreibt man die gesuchten Mengen mit Hilfe der Eigenschaften $a(x)$ und $b(x)$ bzw. $x \in A$ und $x \in B$, so findet man mit der **Negation** und den beiden folgenden logischen Verknüpfungen sein Auslangen:

- Logische "Und"-Verknüpfung (Konjunktion):
  Man schreibt: "$\wedge$" und liest: "… und …" oder: "sowohl … als auch …"

- Logische "Oder"-Verknüpfung (Disjunktion):
  Man schreibt: "$\vee$" und liest: "… oder …"

Beschreibt man die gesuchten Mengen mit Hilfe der Mengen A und B, so findet man mit der **Komplementärmengenbildung** und den beiden folgenden mengentheoretischen Verknüpfungen sein Auslangen:

- Mengentheoretische "Und"-Verknüpfung (Durchschnittsbildung):
  Man schreibt: "$\cap$" und liest: "… geschnitten mit …"
  Das Zeichen "$\cap$" soll an das Zeichen "$\wedge$" erinnern.
  Die Durchschnittsmenge $A \cap B$ der Mengen A und B besteht aus allen Elementen von G, welche in A und B liegen.

- Mengentheoretische "Oder"-Verknüpfung (Vereinigungsbildung):
  Man schreibt: "$\cup$" und liest: "… vereinigt mit …"
  Das Zeichen "$\cup$" soll an das Zeichen "$\vee$" erinnern.
  Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ der Mengen A und B besteht aus allen Elementen der Grundmenge G, welche in A oder in B liegen (oder in beiden).