Computer im Mathematikunterricht

CiMU –

Analytische Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorrechnung **4**
1.1 Grundbegriffe 4
1.2 Spezielle Vektoren 5
1.3 Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar 6
1.4 Mulitplikation von Vektoren 7
1.5 Anwendungen der Vektorrechnung 9
1.5.1 Teilung einer Strecke 9
1.5.2 Abstandsberechnungen – HNF 9
1.5.3 Flächenberechnungen 10
1.5.4 Volumsberechnungen 10
1.5.5 Winkel zweier Vektoren 10
1.5.6 Winkelsymmetrale 10
1.5.7 Merkwürdige Punkte eines Dreiecks 11
1.5.8 Vierecke 13

2 Analytische Geometrie der Geraden und Ebene **14**
2.1 Die Gleichung der Geraden 14
2.2 Die Gleichung der Ebene 15
2.3 Lagebeziehung zweier Geraden 16
2.4 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene 17
2.5 Lagebeziehung zweier Ebenen 18
2.6 HESSEsche Normalform der Geraden- und Ebenengleichung 19
2.7 Abstandsberechnungen mittels des Kreuzprodukts 20
2.8 Winkel zwischen Geranden und Ebenen 21

3 Analytische Geometrie des Kreises und der Kugel **22**
3.1 Kreisgleichung 22
3.2 Kugelgleichung 23
3.3 Lagebeziehung Kreis (Kugel) und Gerade 24
3.4 Gleichung der Tangente in einem Punkt des Kreises 25
3.5 Schnittwinkel eines Kreises (einer Kugel) mit einer Geraden 26
3.6 Tangenten aus einem Punkt P an einen Kreis 27
3.7 Berührbedingung 28
3.8 Schnitt und Schnittwinkel zweier Kreise 29
3.9 Der Umkreis bzw. die Umkugel 30
3.10 Aufstellen von Kreis- und Kugelgleichungen 31

4 Analytische Geometrie der Kegelschnitte **32**
4.1 Ellipse 33
4.2 Hyperbel 38
4.3 Aufstellen von Ellipsen- und Hyperbelgleichungen 40
4.4 Parabel 41
4.5 Aufstellen von Parabelgleichungen 43
4.6 Konfokale Kegelschnitte 44
4.7 Lagebeziehung Kegelschnitt und Gerade 46
4.8 Gleichung der Tangente in einem Punkt des Kegelschnitts 47
4.9 Tangenten aus einem Punkt an einen Kegelschnitt 48
4.10 Schnittwinkel eines Kegelschnitts mit einer Geraden 49
4.11 Schnittwinkel zweier Kegelschnitte 50
4.12 Gemeinsame Tangenten an zwei Kegelschnitte 51
4.13 Extremwertaufgaben der analytischen Geometrie 52
4.14 Zusammenfassung Kegelschnitte 53

Vorwort

Sie werden sich vielleicht wundern, warum in diesem Skriptum einiges nur in Stichworten erklärt ist bzw. tw. sehr viel Platz auf den Seiten gelassen wurde. Dieses Skriptum ist nicht zum Selbststudium gedacht, sondern jede einzelne Seite als Kopiervorlage für Lehrer (Schüler) – ähnlich einem Formelheft.
Es wird der AHS-Schulstoff der 5. (Vektorrechnung), 6. (Analytische Geometrie der Gerade und Ebene) und 7. Klasse (Analytische Geometrie des Kreises, der Kugel und der Kegelschnitte) behandelt.
Ich selbst verwende dieses Skriptum auch in der 8. Klasse um schnell und übersichtlich eine Wiederholung der Analytischen Geometrie im Unterricht durchnehmen zu können.

Mag. Mone Denninger

1 Vektorrechnung

1.1 Grundbegriffe

Definition 1. Die Menge aller zu $\overrightarrow{AB}$ gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeile bezeichnet man als den zu $\overrightarrow{AB}$ gehörigen **Vektor** $\overrightarrow{v}$.

Der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ heißt **Repräsentant** des Vektors $\overrightarrow{v}$.

“Spitze minus Schaft”-Regel

$\mathbb{R}^2$: A$(x_a|y_a)$, B$(x_b|y_b)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$: A$(x_a|y_a|z_a)$, B$(x_b|y_b|z_b)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$$

Länge (Betrag) eines Vektors

$\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.2 Spezielle Vektoren

Nullvektor

Der Vektor $\overrightarrow{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.

Ortsvektor

Als **Ortsvektor** bezeichnet man jene Pfeile, deren Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt.

Einheitsvektor

Ein Vektor mit der Länge (dem Betrag) 1 heißt **Einheitsvektor**.
Den zu $\overrightarrow{a}$ gehörenden Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ erhält man, indem man die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{a}$ durch seinen Betrag dividiert:

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a}$$

1.3 Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar

Parallelitätskriterium

Zwei Vektoren sind genau dann zueinander parallel, wenn der eine Vektor ein „Vielfaches“ des anderen Vektors ist:

$$\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{b} = v \cdot \overrightarrow{a}$$

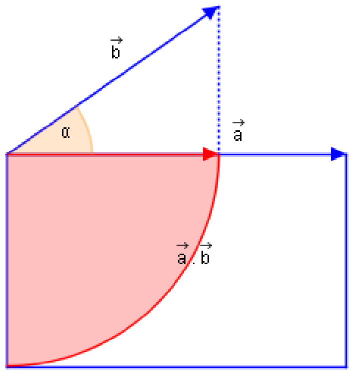
1.4 Mulitplikation von Vektoren

Skalares Produkt

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Geometrische Definition des skalaren Produkts:
Das Skalarprodukt ist der Betrag des einen Vektors ($|\overrightarrow{a}|$) mal den Betrag des auf den ersten normal projizierten zweiten Vektors ($|\overrightarrow{x}|$ - rot!).



$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{|\overrightarrow{x}|}{|\overrightarrow{b}|}$$

$$|\overrightarrow{x}| = |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$$

Flächeninhalt des Rechtecks:
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{x}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$

Satz 2. Das skalare Produkt zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren ist genau dann gleich Null, wenn die beiden Vektoren aufeinander normal stehen.
$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, d.h.

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b = 0 \text{ bzw.} \qquad \text{Orthogonalitätskriterium}$$
$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$$

Beweis 3. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{b} = v \cdot \overrightarrow{a}^l$ (Parallelitätskriterium)
$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}^l = \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}$$
$$x_b = -v \cdot y_a \qquad | \cdot x_a$$
$$y_b = v \cdot x_a \qquad | \cdot y_a$$
$$\left.\begin{array}{l} x_a x_b = -v \cdot x_a y_a \\ y_a y_b = v \cdot x_a y_a \end{array}\right] +$$
$$x_a x_b + y_a y_b = 0 \qquad \text{Skalares Produkt}$$

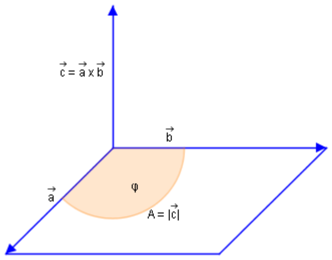
Vektorielles Produkt

Sind $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Vektoren des Raumes, do heißt der Vektor

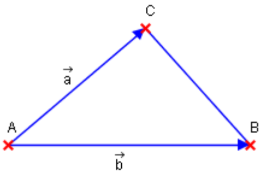
$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - y_b z_a \\ -(x_a z_b - x_b z_a) \\ x_a y_b - x_b y_a \end{pmatrix}$$

das vektorielle Produkt oder Kreuzprodukt von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.
Geometrische Überlegungen:

- $\overrightarrow{c}$ steht normal auf $\overrightarrow{a}$ und normal auf $\overrightarrow{b}$.
- Der Betrag von $\overrightarrow{c}$ ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ bilden ein Rechtssystem.
- $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\varphi$



Flächeninhalt eines Dreiecks:



$$A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

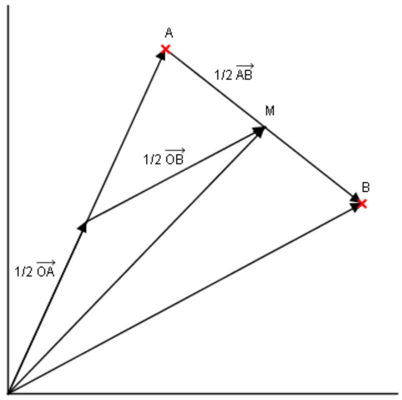
1.5 Anwendungen der Vektorrechnung

1.5.1 Teilung einer Strecke

Mittelpunkt einer Strecke

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Beispiel 4. Begründe die Regel $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ anhand einer geeigneten Darstellung, wobei der Punkt M die Strecke AB halbiert.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \\
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)
\end{aligned}$$

Satz 5. Das Abtragen einer Strecke der Länge d von einem Punkt A in Richtung des Vektors $\overrightarrow{a}$ erfolgt gemäß der Formel:

$$X = A + d \cdot \overrightarrow{a_0}$$

Satz 6 (Teilungspunkt einer Strecke). Ein Punkt T der Trägergeraden g der Strecke AB heißt Teilungspunkt der Strecke AB zum Teilverhältnis λ ($\in \mathbb{R}$) genau dann, wenn gilt:

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{BT}$$

Ist λ kleiner Null, so heißt T innerer Teilungspunkt.
Ist $\lambda > 0$, so heißt T äußerer Teilungspunkt.

Beweis 7 (Herleitung der Teilungspunktformel).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AT} &= \lambda \cdot \overrightarrow{BT} \\
T - A &= \lambda \cdot (T - B) \\
T - A &= \lambda T - \lambda B \\
T(1-\lambda) &= A - \lambda B \\
T &= \frac{A - \lambda B}{1 - \lambda} \qquad \lambda \neq 1
\end{aligned}$$

1.5.2 Abstandsberechnungen – HNF

$$d = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

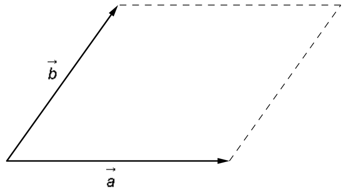
Abstand eines Punktes S von einer Ebene ε:
Mittels HESSEscher Abstandsformel

$$d(S, \varepsilon) = \left|\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{n}_0\right|$$

A ... Punkt der Ebene
$\overrightarrow{n}_0$ ... Einheitsvektor des Normalvektors der Ebene

1.5.3 Flächenberechnungen

Raum & Ebene: $A_P = \sqrt{\overrightarrow{a}^2 \cdot \overrightarrow{b}^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2}$
Ebene: $A_P = |x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b|$
Raum: $A_P = \left|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right|$



1.5.4 Volumsberechnungen

Prallelepiped: $V = \left|\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}\right|$
Tetraeder: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}\right|$

1.5.5 Winkel zweier Vektoren

Winkel φ zwischen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$:

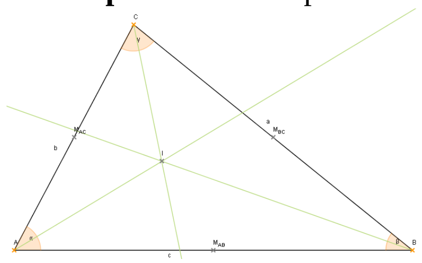
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

1.5.6 Winkelsymmetrale

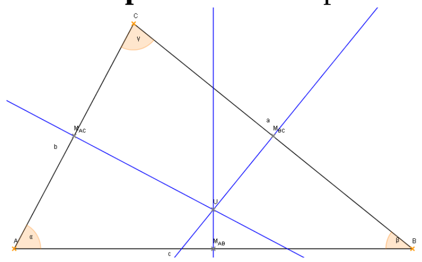
$$\overrightarrow{\omega_\alpha} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0}$$
$$\overrightarrow{\omega_\beta} = \overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{BC_0}$$
$$\overrightarrow{\omega_\gamma} = \overrightarrow{CA_0} + \overrightarrow{CB_0}$$

1.5.7 Merkwürdige Punkte eines Dreiecks

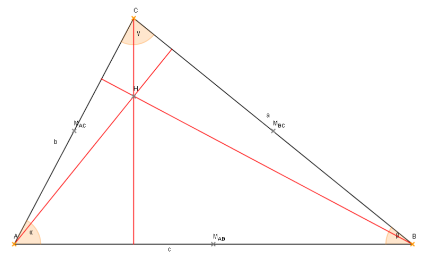
Inkreismittelpunkt: Schnittpunkt der Winkelsymmetralen



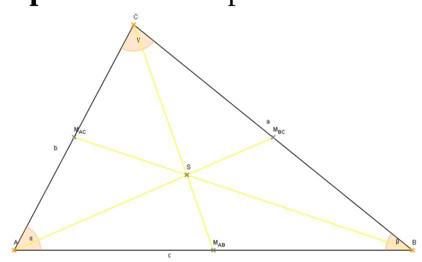
Umkreismittelpunkt: Schnittpunkt der Streckensymmetralen



Höhenschnittpunkt: Schnittpunkt der Höhen



Schwerpunkt: Schnittpunkt der Schwerlinien



Eulersche Gerade: Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt liegen auf der Eulerschen Geraden.

Inkreisradius:

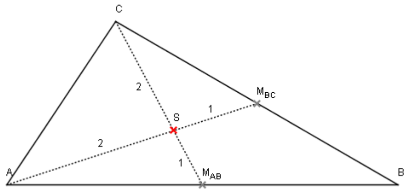
$$\rho = \frac{A}{s} \qquad s = \frac{u}{2}$$

Flächeninhalt des Dreiecks in der Ebene: HERONsche Flächenformel

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

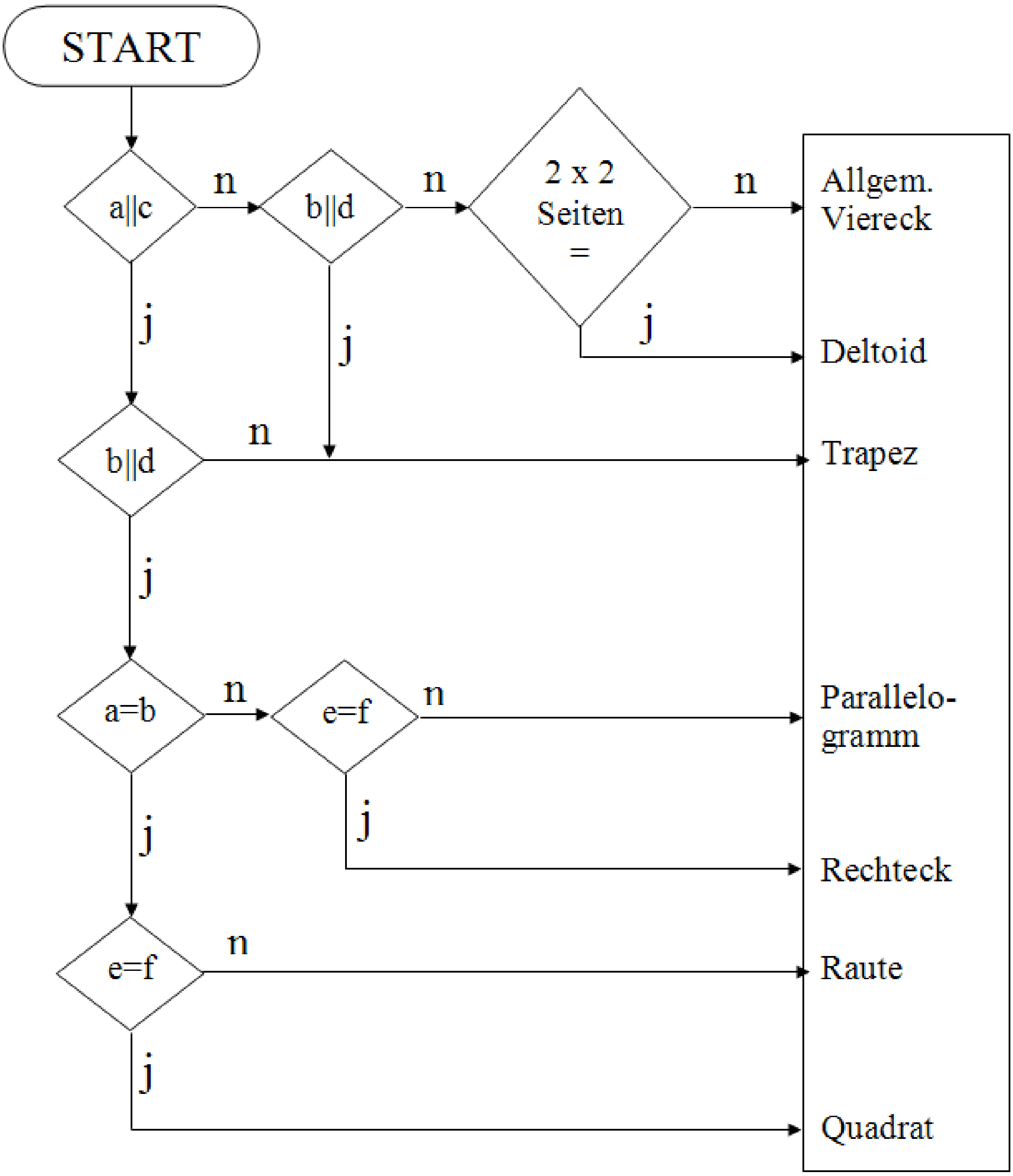
Beispiel 8. Zeige anhand einer geeigneten Skizze rechnerisch, dass für die Berechnung des Schwerpunkts in einem Dreieck gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{BC}} = \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OM_{BC}} - \overrightarrow{OA}\right) = \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)
\end{aligned}$$

1.5.8 Vierecke



2 Analytische Geometrie der Geraden und Ebene

2.1 Die Gleichung der Geraden

Parameterdarstellung:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{OX}$ … Stellvertreter für alle Punkte der Geraden
$\overrightarrow{OA}$ … Ortsvektor zu einem bestimmten Punkt der Geraden
t … Parameter ($t \in \mathbb{R}$)
$\overrightarrow{AB}$ … Richtungsvektor der Geraden

Parameterdarstellung einer Strecke: $t \in [0; 1]$

Hauptform der Geradengleichung: (explizit)

$$y = kx + d$$

k … Steigung
d … Abstand des Schnittpunkts mit der y-Achse vom Ursprung

Allgemeine Geradengleichung: (implizit)

$$ax + by = c$$

Satz 9 (Normalvektorsatz). Die Koeffizienten von x und y der allgemeinen Geradengleichung sind die Koordinaten eines Normalvektors der zugehörigen Geraden.

Normalvektorform:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$\overrightarrow{n}$ … Normalvektor
$\overrightarrow{OP}$ … Ortsvektor zu einem best. Punkt auf der Geraden

2.2 Die Gleichung der Ebene

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{b}$$

$\overrightarrow{OX}$ …Stellvertreter für alle Punkte der Ebene
$\overrightarrow{OA}$ …Ortsvektor zu einem bestimmten Punkt der Ebene
s, t …Parameter ($s, t \in \mathbb{R}$)
$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ …Richtungsvektoren der Ebene ($\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$)

Normalvektorform der Ebene:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$\overrightarrow{n}$ …Normalvektor der Ebene: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{OP}$ …Ortsvektor eines best. Punktes der Ebene

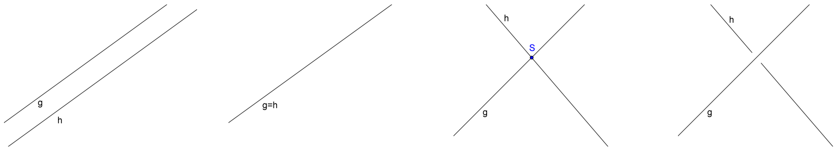
Implizite Darstellung einer Ebenengleichung:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Beispiel 10. Untersuche rechnerisch, welche Lage die beiden Geraden
g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
zueinander haben!
Ermittelt gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes!

2.3 Lagebeziehung zweier Geraden

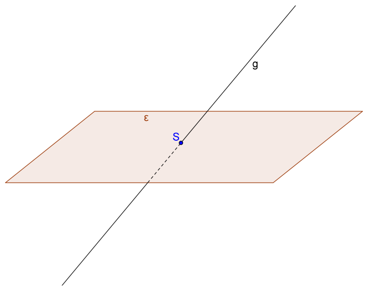
g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{g}$
h: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{h}$



parallel	ident	schneidend	windschief
g ∩ h = {}	g = h	g ∩ h = {S}	g ∩ h = {}
$\overrightarrow{g} = v \cdot \overrightarrow{h}$	$\overrightarrow{g} = v \cdot \overrightarrow{h}$	$\overrightarrow{g} \neq v \cdot \overrightarrow{h}$	$\overrightarrow{g} \neq v \cdot \overrightarrow{h}$
		w.A.	f.A.
P $\notin$ h	P $\in$ h	L= {S}	L={ }

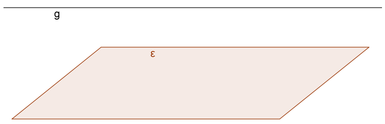
2.4 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

schneidend



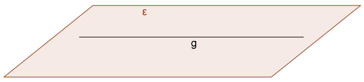
$g \cap \varepsilon = \{S\}$

parallel



$g \cap \varepsilon = \{\}$

g liegt in der Ebene



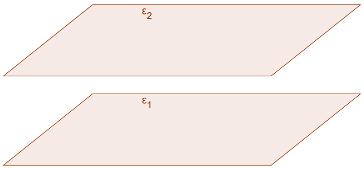
$g \in \varepsilon$
$g \cap \varepsilon = g$

2.5 Lagebeziehung zweier Ebenen

schneidend

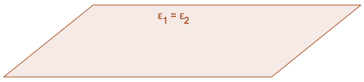
$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = g$

parallel



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{\}$

fallen zusammen



$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

2.6 HESSEsche Normalform der Geraden- und Ebenengleichung

Wird in der Normalvektorform $\overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$ der Geraden g im $\mathbb{R}^2$ bzw. der Ebene ε im $\mathbb{R}^3$ anstelle eines beliebigen Normalvektors ein Normalvektor $\overrightarrow{n_0}$ verwendet, der auch Einheitsvektor ist, so heißt die Gleichung

$$\overrightarrow{n_0} \cdot \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$$

HESSEsche Normalform (HNF) der Geraden g bzw. der Ebene ε.

Koordinatenschreibweise der HNF…
…Geradengleichung

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

…Ebenengleichung

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

2.7 Abstandsberechnungen mittels des Kreuzprodukts

Normalabstand d eines Punktes R von einer Geraden im $\mathbb{R}^3$
g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{g}$ …Gerade im $\mathbb{R}^3$
$\overrightarrow{g_0}$ …Einheitsvektor von $\overrightarrow{g}$

$$d = \left| \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{g_0} \right|$$

Der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden
g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OG} + t \cdot \overrightarrow{g}$
h: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OH} + r \cdot \overrightarrow{h}$

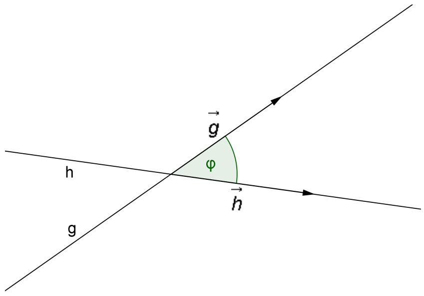
$$d = \frac{\left| \overrightarrow{GH} \cdot \left(\overrightarrow{g} \times \overrightarrow{h} \right) \right|}{\left| \overrightarrow{g} \times \overrightarrow{h} \right|}$$

2.8 Winkel zwischen Geranden und Ebenen

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$
$$\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

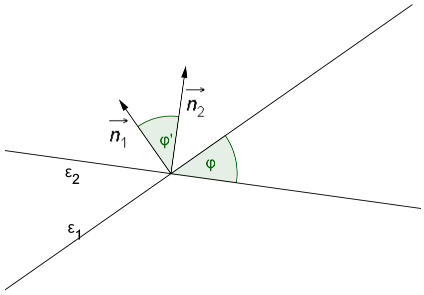
(1) Gerade - Gerade

- $\cos$-Formel mit beiden Richtungsvektoren
- $\cos$-Formel mit beiden Normalvektoren
- $\tan$-Formel mit beiden Steigungen



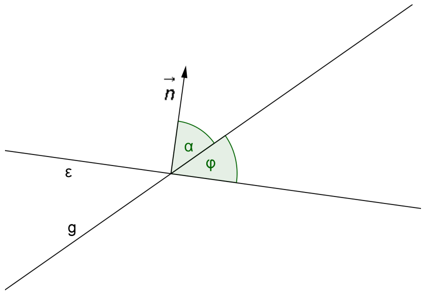
(2) Ebene - Ebene

- $\cos$-Formel mit beiden Normalvektoren



(3) Gerade - Ebene

- $\cos$-Formel mit dem Normalvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden; anschließend $90° - \varphi$

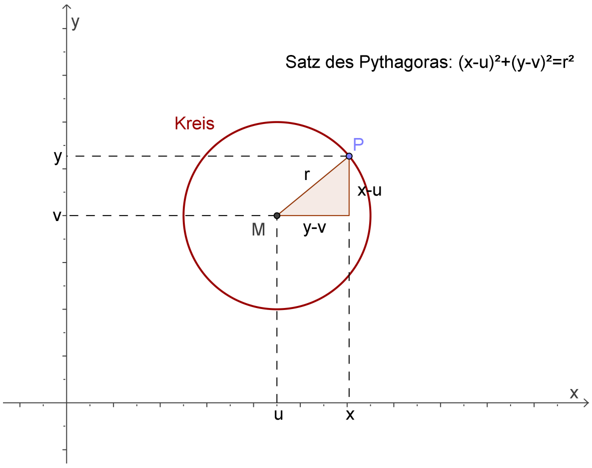


3 Analytische Geometrie des Kreises und der Kugel

3.1 Kreisgleichung

Definition 11. Der Kreis (Die Kreislinie) ist die Menge aller Punkte X der Ebene, die von einem gegebenen Punkt M, dem Kreismittelpunkt, den gleichen Abstand r (Kreisradius) haben:

$$\mathrm{k} = \{X | \overline{XM} = r\}$$



Allgemeine Kreisgleichung mit Mittelpunkt M$(u|v)$:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursrung M$(0|0)$ ist, heißt Mittelpunktskreis oder Ursprungskreis:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

3.2 Kugelgleichung

Definition 12. Die Kugel ist die Menge aller Punkte X des Raumes, die von einem gegebenen Punkt M, dem Kreismittelpunkt, den gleichen Abstand r (Kugelradius) haben:

$$\mathrm{k} = \{X|\overline{XM} = r\}$$

Allgemeine Kugelgleichung mit Mittelpunkt M$(u|v|w)$:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$$

Eine Kugel, deren Mittelpunkt der Ursrung M$(0|0|0)$ ist, heißt Mittelpunktskugel oder Ursprungskugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

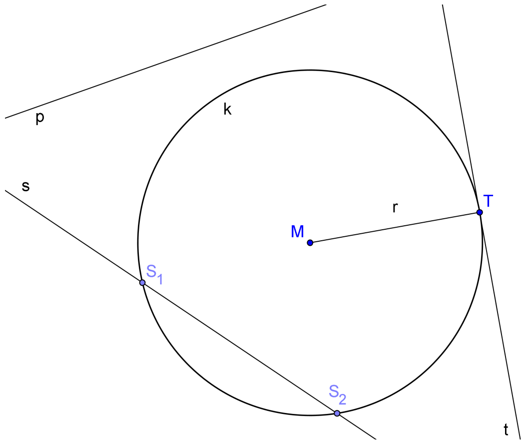
3.3 Lagebeziehung Kreis (Kugel) und Gerade

Definition 13. Besitzt eine Gerade mit einem Kreis (mit einer Kugel)…

… zwei verschiedene Schnittpunkte, so heißt die Gerade Sekante: $s \cap k = \{S_1, S_2\}$

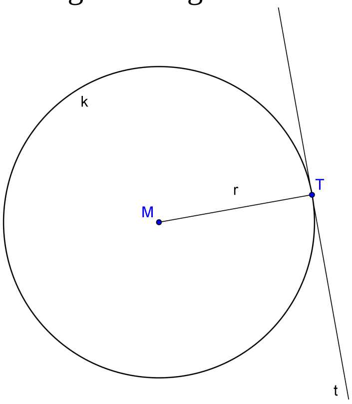
… einen Punkt („Berührpunkt“), so heißt die Gerade Tangente: $t \cap k = \{T\}$

… keinen Schnittpunkt, so heißt die Gerade Passante: $p \cap k = \{\}$



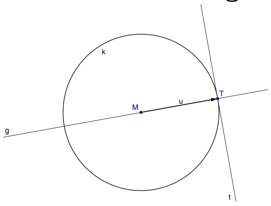
3.4 Gleichung der Tangente in einem Punkt des Kreises

bzw. Gleichung der Tangentialebene in einem Punkt der Kugel



Die Gleichung der Tangente t (Tangentialebene τ) in einem gegebenen Punkt T des Kreises k (der Kugel k) kann entweder...

... mittels einfacher geometrischer Überlegungen bestimmt werden (Vektorrechnung)



$$g \perp t$$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{n_t}$$
$$\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{OT}$$

... oder mittels Spaltformel bestimmt werden.
Kreisgleichung:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Spaltformel für T$(x_1|y_1)$:

$$(x_1-u)(x-u) + (y_1-v)(y-v) = r^2$$

Kugelgleichung:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$$

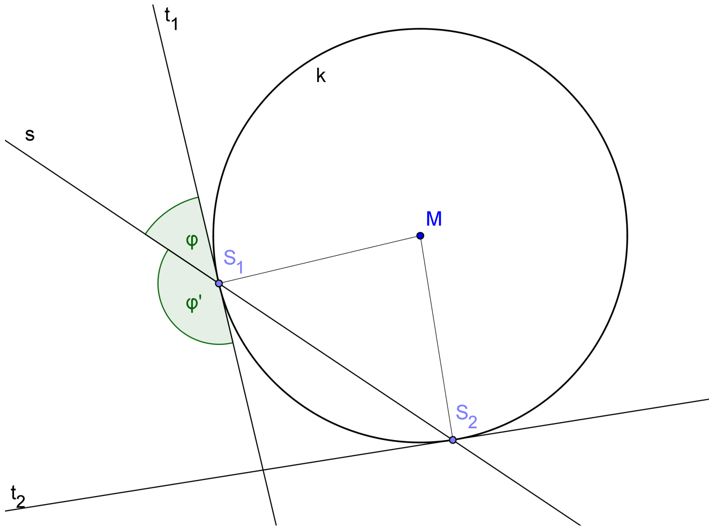
Spaltformel für T$(x_1|y_1|z_1)$:

$$(x_1-u)(x-u) + (y_1-v)(y-v) + (z_1-w)(z-w) = r^2$$

Werden in die Spaltformel die Koordinaten des Berühungspunktes T eingesetzt, so erhält man die Tangente t. Setzt man allerdings einen Punkt P, der nicht auf dem Kreis (der Kugel) liegt ein, so erhält man die Polare (siehe Seite 27)!

3.5 Schnittwinkel eines Kreises (einer Kugel) mit einer Geraden

Der Schnittwinkel φ der Geraden g mit dem Kreis k (der Kugel k) ist der Winkel, den die Gerade g mit der Kreistangente t (der Tangentialebene τ) in einem der Schnittpunkte von k mit g einschließt.

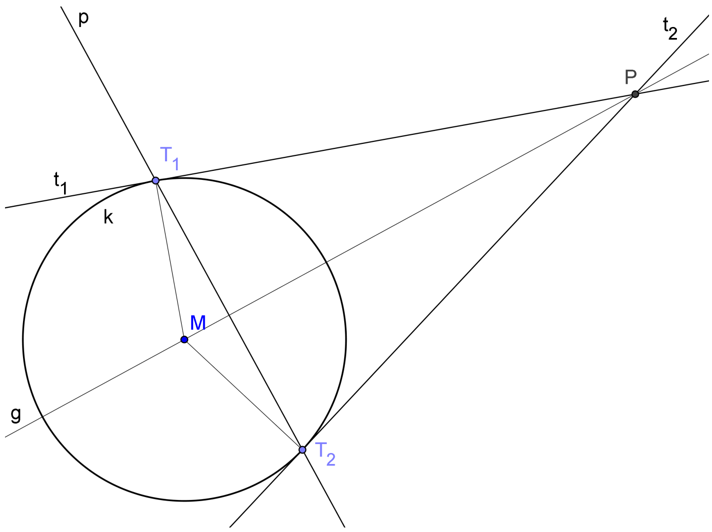


3.6 Tangenten aus einem Punkt P an einen Kreis

(1) I: Punkt P in die Geradengleichung einsetzen
II: Berührbedingung
$\Rightarrow k, d$

(2) Aufspalten, P einsetzen $\Rightarrow$ Polare
Polare $\cap$ k $\Rightarrow T_1, T_2$
Tangenten in T_1, T_2 legen

Polarengleichung:
Sind x_1 und y_1 die Koordinaten eines beliebigen Punktes P$(x_1|y_1)$, der nicht auf der Kreislinie liegt und nicht mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt, so stellt die Spaltformel die Gleichung der Polaren p des Punktes P dar. P heißt Pol bezüglich des Kreises k.



3.7 Berührbedingung

Ist die Gerade der Gestalt $y = kx + d$ eine Tangente t an den Kreis k[M$(u|v)$,r], so gilt die Beziehung („Berührbedingung“)

$$(uk - v + d)^2 = r^2(k^2 + 1)$$

Für einen Mittelpunktskreis k[M$(0|0)$,r] lautet sie analog:

$$d^2 = r^2(k^2 + 1)$$

Anwendungen:

1. Zum Ermitteln der Tangentengleichung, wenn der Kreis und die Steigung k oder d gegeben ist.

2. Zum Ermitteln der Kreisgleichung, wenn t gegeben ist.

3.8 Schnitt und Schnittwinkel zweier Kreise

3.9 Der Umkreis bzw. die Umkugel

Beispiel 14. Berechne die Umkugel der Pyramide mit Basis ABC[A$(1|2|3)$, B$(5|0|-1)$, C$(-1|6|-1)$] und Spitze S$(6|7|1)$
2 Methoden:

(1) A, B, C, S in die Kugelgleichung $(x-u)^2+(y-v)^2+z-w)^2=r^2$ einsetzen ⇒ 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

(2) Der Mittelpunkt M der Kugel muss von A, B, C und S gleich weit entfernt sein. Wo liegen die Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind? Auf der Ebene ε_1 die durch den Mittelpunkt von AB M$_{AB}(3|1|1)$ geht und normal auf AB steht:

$$\varepsilon_1 : \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\varepsilon_1 : 2x - y - 2z = 3$$

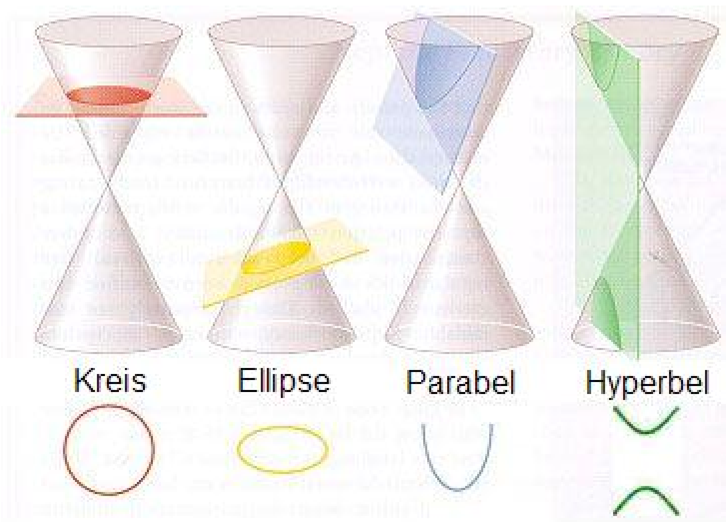
ε_2: $\perp$AS durch M$_{AS}$
ε_3: $\perp$BC durch M$_{BC}$
$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 =$ { Kugelmittelpunkt }
$r = \overline{AM}$

M$(3|4|-\frac{1}{2})$, $r = 4.5$

3.10 Aufstellen von Kreis- und Kugelgleichungen

4 Analytische Geometrie der Kegelschnitte

Die Kegelschnittslinien ergeben sich – wie der Name bereits nahelegt – durch verschiedene Schnittführungen an einem Kegel, genauer gesagt eigentlich einem Doppelkegelmantel. Unter "Kegel" ist dabei also eine Fläche zu verstehen, nicht ein ausgefüllter Körper (=Vollkegel).
Hier die möglichen Schnitte einer Ebene mit einem Doppelkegelmantel:
Zwei Darstellungen fehlen: Wenn die Ebene durch die Kegelspitze geht, erhält man entweder nur einen Punkt oder eine Gerade (Kegelerzeugende) als Schnittmenge.



1. Die Schnittebene ist parallel zur Grundebene, man erhält einen Kreis als Schnittkurve (Spezialfall der Ellipse).

2. Die Schnittebene ist zur senkrechten Kegelachse etwas geneigt - aber weniger als die Neigung der Kegelerzeugenden – man erhält eine Ellipse als Schnittkurve.

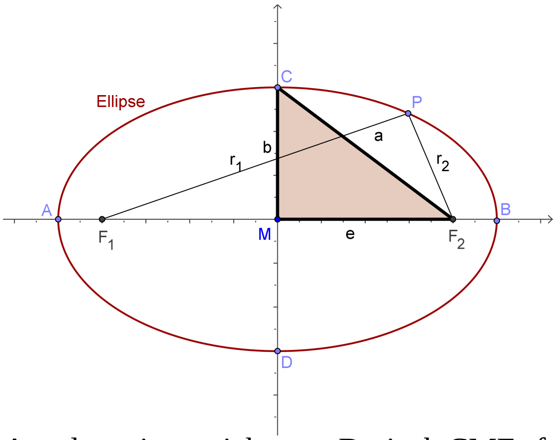
3. Die Schnittebene ist genau parallel zur Kegelerzeugenden – man erhält eine Parabel als Schnittkurve.

4. Die Neigung der Schnittebene ist noch größer als parallel zur Kegelerzeugenden – man erhält zwei Schnitkurven, je eine am oberen und eine am unteren Kegelmantel – die beiden Äste einer Hyperbel. Ist die Ebene genau senkrecht und geht nicht durch die Spitze, erhält man eine gleichseitige Hyperbel.

4.1 Ellipse

Definition 15. Die Menge ell aller Punkte P der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten (Brennpunkten) F_1 und F_2 konstant $2a$ und größer als die Entfernung der Brennpunkte ist, heißt **Ellipse**:

$$\text{ell} = \{P|(\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a) \wedge (2a > \overline{F_1F_2})\}$$



Bezeichnungen:

M	... Mittelpunkt
P	... Ellipsenpunkt
F_1, F_2	... Brennpunkte
A, B	... Hauptscheitel
C, D	... Nebenscheitel
r_1, r_2	... Brennstrahlen
$\overline{AB} = 2a$	... Hauptachse
$\overline{CD} = 2b$	... Nebenachse
a, b	... Halbachen ($a, b \in \mathbb{R}^+$)
e	... lineare Exzentrizität

Aus dem eingezeichneten Dreieck CMF_2 folgt:

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Flächeninhalt: $A_{\text{ell}} = ab\pi$

Herleitung der Mittepunktsgleichung der Ellipse

F$_1(-e|0)$
F$_2(e|0)$
P$(x|y)$
Aus der Ellipsendefinition wissen wir:

$$\begin{aligned}
\overline{F_1P} + \overline{F_2P} &= 2a \\
\left|\overrightarrow{F_1P}\right| + \left|\overrightarrow{F_2P}\right| &= 2a \\
\left|\begin{pmatrix} x+e \\ y \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} x-e \\ y \end{pmatrix}\right| &= 2a \\
\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} &= 2a
\end{aligned}$$

Eine Wurzelgleichung löst man, indem man eine der beiden Wurzeln auf die andere Seite bringt und anschließend quadriert (Achtung! Binomische Formel nicht vergessen!):

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+e)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-e)^2+y^2} \qquad |^2 \\
(x+e)^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2 + y^2
\end{aligned}$$

Jetzt vereinfachen wir und bringen wieder die Wurzel auf eine und den Rest auf die andere Seite. Nachdem wir ein weiters Mal quardiert haben ist keine Wurzel mehr vorhanden:

$$\begin{aligned}
x^2+2ex+e^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} &= 4a^2 - 4ex \qquad | : 4 \\
a\sqrt{(x-e)^2+y^2} &= a^2 - ex \qquad |^2 \\
a^2((x-e)^2+y^2) &= a^4 - 2a^2ex + e^2x^2
\end{aligned}$$

Gleich ist es geschafft! Zu guter letzt vereinfachen wir wieder, bringen alle Terme mit x und y auf die linke und den Rest auf die rechte Seite und ersetzten $a^2 - e^2$ durch b^2 (siehe oben):

$$\begin{aligned}
a^2(x^2-2ex+e^2+y^2) &= a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 \\
a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 \\
a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2e^2 \\
(a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-e^2) \qquad |b^2 = a^2 - e^2 \\
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}$$

Manchmal wird die Ellipsengleichung auch in folgender Form angegeben:

$$\begin{aligned}
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \qquad | : a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Beispiel 16 (NOVAK3,S10,16a). Gesucht ist die lineare Exzentrizität der Ellipse ell: $9x^2 + 25y^2 = 900$!

$$\begin{aligned} 9x^2 + 25y^2 &= 900 \qquad |:900 \\ \frac{9x^2}{900} + \frac{25y^2}{900} &= 1 \\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 100 \qquad & e^2 &= a^2 - b^2 \\ b^2 &= 36 \qquad & e^2 &= 64 \\ & & &\underline{\underline{e = 8}} \end{aligned}$$

Beispiel 17 (NOVAK3,S10,16c). Gesucht ist die lineare Exzentrizität der Ellipse ell:[M$(0|0)$, $a = 2\sqrt{5}$, P$(4|1)$]!

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ b^2 \cdot 16 + 20 \cdot 1 &= 20 \cdot b^2 \\ 20 &= 4b^2 \\ b^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 - b^2 = 20 - 5 \\ e^2 &= 15 \qquad \underline{\underline{e = \sqrt{15}}} \end{aligned}$$

16bd

Beispiel 18 (NOVAK3,S10,17c). Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Ellipse ell: $x^2 + 4y^2 = 25$ mit der Geraden g[Q$(1|0)$, $k = -\frac{1}{2}$] sind zu bestimmen!

$$\begin{aligned} y &= kx + d \\ 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + d \\ d &= \frac{1}{2} \qquad \underline{\text{g: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

g: $x = 2 - y + 1$

$$\begin{aligned} \text{ell} \cap \text{g} : (1-2y)^2 + 4y^2 &= 25 \\ 1 - 4y + 4y^2 + 4y^2 &= 25 \\ 8y^2 - 4y - 24 &= 0 \qquad |:4 \\ 2y^2 - y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ y_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} \end{aligned}$$

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = -\frac{3}{2}$$

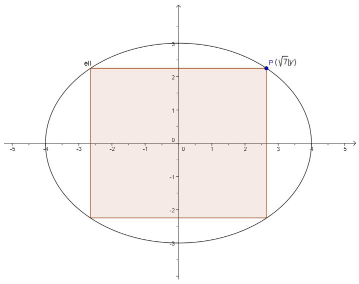
$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 4$$

17d

$$\underline{\underline{S_1(-3|2)}} \qquad \underline{\underline{S_2(4|-\tfrac{3}{2})}}$$

Beispiel 19 (NOVAK3,S10,18). Die Ellipse ell: $9x^2 + 16y^2 = 144$ ist ein Rechteck mit der Seitenlänge $l = 2\sqrt{7}$ einzuschreiben. Berechne Flächeninhalt A und Umfang u des Rechtecks!

P$(\sqrt{7}|y) \in$ ell



$$\begin{aligned} 9x^2 + 16y^2 &= 144 \\ 9 \cdot 7 + 16 \cdot y^2 &= 144 \\ 16y^2 &= 81 \\ y &= \frac{9}{4} \qquad \underline{\underline{\text{P}(\sqrt{7}|\tfrac{9}{4})}} \end{aligned}$$

??

Herleitung der Berührbedingung der Ellipse

Sollte die Gerade t eine Tangente an die Ellipse ell sein, dann haben t und ell genau einen Schnittpunkt.
ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ t: $y = k \cdot x + d$
Wir schneiden die Tangente mit der Ellipse:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2(kx+d)^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2dkx + d^2) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2dkx + a^2d^2 &= a^2b^2 \\ (b^2 + a^2k^2) \cdot x^2 + (2a^2dk) \cdot x + (a^2d^2 - a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

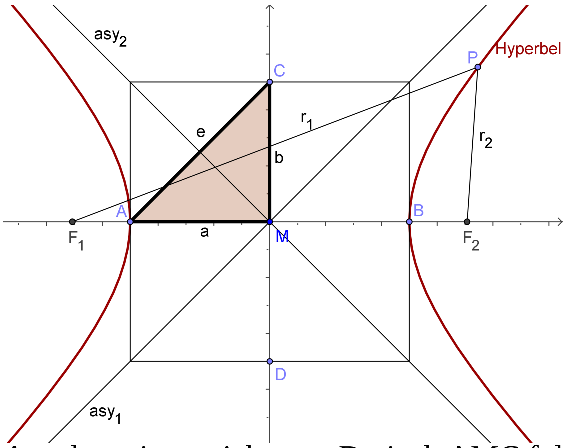
Setzten wir nun die Koeffizienten in die große Lösungsformel ein, dann muss (damit wir nur einen Schnittpunkt erhalten) der Ausdruck unter der Wurzel – die Diskriminante – null sein!

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= 0 \\ (2a^2dk)^2 - 4 \cdot (b^2 + a^2k^2) \cdot (a^2d^2 - a^2b^2) &= 0 \\ 4a^4d^2k^2 - 4 \cdot (a^2b^2d^2 - a^2b^4 + a^4d^2k^2 - a^4b^2k^2) &= 0 \\ 4a^4d^2k^2 - 4a^2b^2d^2 + 4a^2b^4 - 4a^4d^2k^2 + 4a^4b^2k^2 &= 0 \\ -4a^2b^2d^2 + 4a^2b^4 + 4a^4b^2k^2 &= 0 \qquad |: 4a^2b^2 \\ -d^2 + b^2 + a^2k^2 &= 0 \qquad | + d^2 \\ a^2k^2 + b^2 &= d^2 \end{aligned}$$

4.2 Hyperbel

Definition 20. Die Menge hyp aller Punkte der Ebene, für die der Betrag der Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten (Brennpunkten) konstant und kleiner als die Entfernung der Brennpunkte ist, heißt **Hyperbel**:

$$\text{hyp} = \{P|(\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = 2a) \wedge (2a < \overline{F_1F_2})\}$$



Bezeichnungen:

M	... Mittelpunkt
P	... Hyperbelpunkt
F_1, F_2	... Brennpunkte
A, B	... Hauptscheitel
C, D	... Endpunkte der Nebenachse
r_1, r_2	... Leitstraheln (Brennstrahlen)
$\overline{AB} = 2a$	... Hauptachse
$\overline{CD} = 2b$	... Nebenachse
a, b	... Halbachen ($a, b \in \mathbb{R}^+$)
e	... lineare Exzentrizität

Aus dem eingezeichneten Dreieck AMC folgt:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Herleitung der Mittepunktsgleichung der Hyperbel

F$_1(-e|0)$
F$_2(e|0)$
P$(x|y)$
Aus der Hyperbeldefinition wissen wir:

$$\begin{aligned}
\overline{F_1P} - \overline{F_2P} &= 2a \\
\left|\overrightarrow{F_1P}\right| - \left|\overrightarrow{F_2P}\right| &= 2a \\
\left|\begin{pmatrix} x+e \\ y \end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix} x-e \\ y \end{pmatrix}\right| &= 2a \\
\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} &= 2a
\end{aligned}$$

Eine Wurzelgleichung löst man, indem man eine der beiden Wurzeln auf die andere Seite bringt und anschließend quadriert (Achtung! Binomische Formel nicht vergessen!):

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+e)^2+y^2} &= 2a + \sqrt{(x-e)^2+y^2} \qquad |^2 \\
(x+e)^2+y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2+y^2
\end{aligned}$$

Jetzt vereinfachen wir und bringen wieder die Wurzel auf eine und den Rest auf die andere Seite. Nachdem wir ein weiters Mal quardiert haben ist keine Wurzel mehr vorhanden:

$$\begin{aligned}
x^2+2ex+e^2+y^2 &= 4a^2+4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+x^2-2ex+e^2+y^2 \\
4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} &= -4a^2+4ex \qquad |:4 \\
a\sqrt{(x-e)^2+y^2} &= -a^2+ex \qquad |^2 \\
a^2((x-e)^2+y^2) &= a^4-2a^2ex+e^2x^2
\end{aligned}$$

Gleich ist es geschafft! Zu guter letzt vereinfachen wir wieder, bringen alle Terme mit x und y auf die linke und den Rest auf die rechte Seite und ersetzten a^2-e^2 durch $-b^2$ (siehe oben):

$$\begin{aligned}
a^2(x^2-2ex+e^2+y^2) &= a^4-2a^2ex+e^2x^2 \\
a^2x^2-2a^2ex+a^2e^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2ex+e^2x^2 \\
a^2x^2-e^2x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2e^2 \\
(a^2-e^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-e^2) \qquad |b^2=a^2-e^2 \\
-b^2x^2+a^2y^2 &= a^2(-b^2) \qquad |\cdot(-1) \\
b^2x^2-a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}$$

Manchmal wird die Hyperbelgleichung auch in folgender Form angegeben:

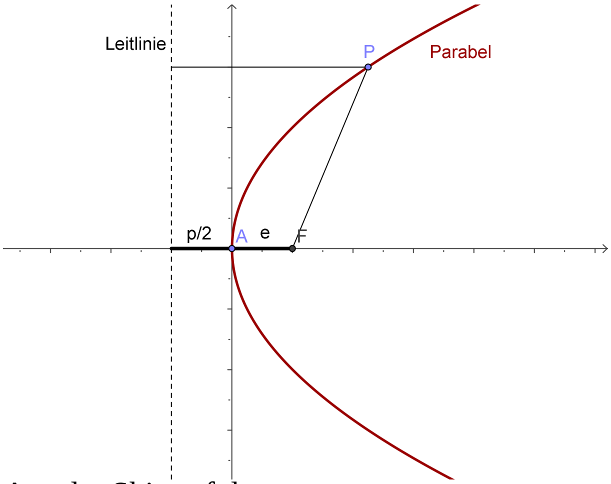
$$\begin{aligned}
b^2x^2-a^2y^2 &= a^2b^2 \qquad |:a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

4.3 Aufstellen von Ellipsen- und Hyperbelgleichungen

4.4 Parabel

Definition 21. Die Menge par aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt (Brennpunkt) und einer Geraden (Leitlinie) gleichen Abstand haben, heißt **Parabel**:

$$\text{par} = \{P | \overline{FP} = \overline{lP}\}$$



Bezeichnungen:

A	... Scheitel
P	... Parabelpunkt
F	... Brennpunkt
l	... Leitlinie
p	... Parameter
e	... lineare Exzentrizität

Aus der Skizze folgt:

$$e = \frac{p}{2}$$

Herleitung der Scheitelgleichung der Parabel in 1. Hauptlage

F$(\frac{p}{2}|0)$
P$(x|y)$
L$(-\frac{p}{2}|y)$
Aus der Parabeldefinition wissen wir:

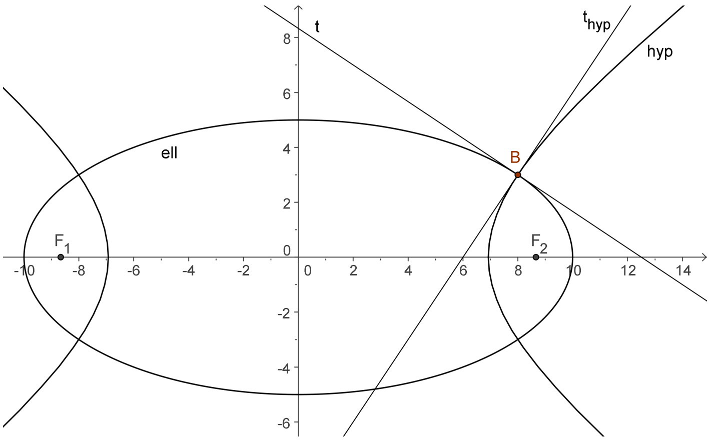
$$\begin{aligned}
\overline{FP} &= \overline{LP} \\
\left|\overrightarrow{FP}\right| &= \left|\overrightarrow{LP}\right| \\
\left|\begin{pmatrix} x-\frac{p}{2} \\ y \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} x+\frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\
\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} &= \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2} \\
\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} &= x+\frac{p}{2} \qquad |^2 \\
x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 &= x^2+px+\frac{p^2}{4} \\
y^2 &= 2px
\end{aligned}$$

4.5 Aufstellen von Parabelgleichungen

4.6 Konfokale Kegelschnitte

Definition 22. Zwei Kegelschnitte heißen konfokal, wenn sie gemeinsame Brennpunkte haben.

Beispiel 23. Die Gerade t: $2x + 3y = 25$ ist Tangente an eine ell (in 1. Hauptlage) mit $e = 5\sqrt{3}$. Eine konvokale Hyperbel geht durch den Berührpunkt B der Geraden t mit der Ellipse. Zeige, dass die Ellipse und die Hyperbel einander in B rechtwinklig schneiden!



t: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$
Ellipse:

- $e^2 = a^2 - b^2 = 75 \Rightarrow a^2 = 75 + b^2$
- $a^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}a^2 + b^2 &= \frac{25^2}{9} \\ 4a^2 + 9b^2 &= 625 \\ 300 + 4b^2 + 9b^2 &= 625 \\ 13b^2 &= 325 \\ b^2 &= 25 \qquad a^2 = 100 \end{aligned}$$

$$\text{ell: } 25x^2 + 100y^2 = 2500$$
$$\text{ell: } \underline{\underline{x^2 + 4y^2 = 100}}$$

Berührpunkt B: ell $\cap$ t:

$$\begin{aligned} x^2 + 4\left(-\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}\right)^2 &= 100 \\ x^2 + 4\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{100}{9}x + \frac{625}{9}\right) &= 100 \\ 9x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 400x + 2500 &= 900 \\ 25x^2 - 400x + 1600 &= 0 \\ x^2 - 16x + 64 &= 0 \\ x_{1,2} &= 8 \pm \sqrt{64 - 64} \\ x &= 8 \qquad \underline{\underline{B(8|3)}} \end{aligned}$$

2. Methode B$(x_1|y_1)$ auszurechnen:

$$\begin{aligned} \text{Tangente in B an die ell: } 2x + 3y &= 25 \quad | \cdot 4 \\ \text{Spaltformel der ell: } x_1 \cdot x + 4 \cdot y_1 \cdot y &= 100 \\ 8x + 12y &= 100 \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhält man ebenfalls den Punkt B$(8|3)$.
Hyperbel:

- B $\in$ hyp
- $e_{\text{hyp}} = e_{\text{ell}} \Rightarrow 75 = a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ 64b^2 - 9a^2 &= a^2b^2 \\ 75 - b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 64b^2 - 9(75 - b^2) &= b^2(75 - b^2) \\ 64b^2 - 675 + 9b^2 &= 75b^2 - b^4 \\ b^4 - 2b^2 - 675 &= 0 \qquad b^2 = u \\ u^2 - 2u - 675 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 675} \\ u_1 &= 27 = b^2 \\ u_2 &= -25 \qquad a^2 = 48 \end{aligned}$$

$$\text{hyp: } 27x^2 - 48y^2 = 1296$$
$$\text{hyp: } \underline{\underline{9x^2 - 16y^2 = 432}}$$

Winkel:

$$\begin{aligned} \text{Spaltformel: } 9x_1x - 16y_1y &= 432 \qquad B(8|3) \\ \text{Tangente in B: } 72x - 48y &= 432 \quad | : 24 \\ \text{t}_{\text{hyp}} : 3x - 2y &= 18 \qquad \text{t}_{\text{ell}} : 2x + 3y = 25 \end{aligned}$$

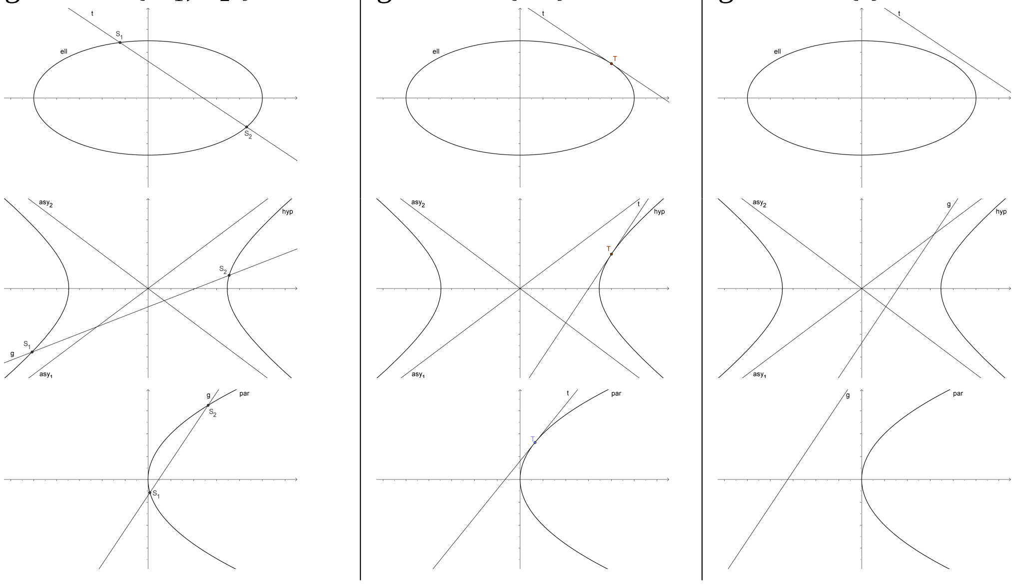
Die beiden Tangenten stehen normal aufeinander, z.B. wenn das skalare Produkt der beiden Normalvektoren Null ist:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0 \quad \text{w.A.}$$

4.7 Lagebeziehung Kegelschnitt und Gerade

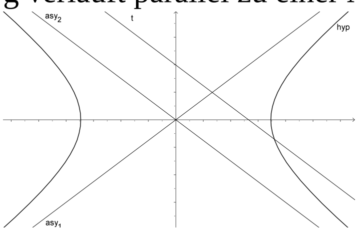
Besitzt eine Gerade g mit einem Kegelschnitt KS

zwei verschiedene Schnittpunkte, so heißt g Sekante des Kegelschnitts.	einen Berührpunkt (d.h. zwei zusammenfallende Schnittpunkte), so heißt g Tangente.	keinen Schnittpunkt, so heißt g Passante des Kegelschnitts.
$g \cap KS = \{ S_1, S_2 \}$	$g \cap KS = \{ T \}$	$g \cap KS = \{ \}$

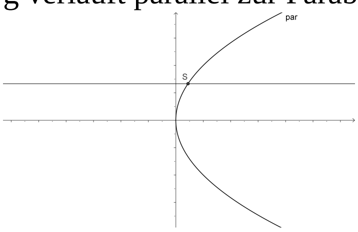


Sonderfälle:

(a) g verläuft parallel zu einer Asymptote: $g \cap hyp = \{ S \}$



(b) g verläuft parallel zur Parabelachse: $g \cap par = \{ S \}$



4.8 Gleichung der Tangente in einem Punkt des Kegelschnitts

Sind x_1 und y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes T$(x_1|y_1)$ der Tangente t, so stellt die Spaötformel die Gleichung der Tangente t dar.

Kegelschnitt	Gleichung	Spaltformel
Ellipse	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$
Hyperbel	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$
Parabel	$y^2 = 2px$	$y_1y = p(x_1 + x)$

4.9 Tangenten aus einem Punkt an einen Kegelschnitt

Sind x_1 und y_1 die Koordinaten eines beliebigen Punktes P$(x_1|y_1)$, der nicht auf dem Kegelschnitt liegt (und für Ellipse und Hyperbel $\neq O(0|0)$ ist), so stellt die Spaltformel die Gleichung der Polaren p des Punktes P, genannt Pol, bezüglich des Kegelschnitts dar.

4.10 Schnittwinkel eines Kegelschnitts mit einer Geraden

Der Schnittwinkel φ einer Geraden g mit einem Kegelschnitt ist der Winkel, den die Gerade g mit der Tangente t des Kegelschnitts jeweils in einem Schnittpunkt von Kegelschnitt und Gerade einschließt.

4.11 Schnittwinkel zweier Kegelschnitte

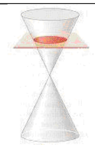
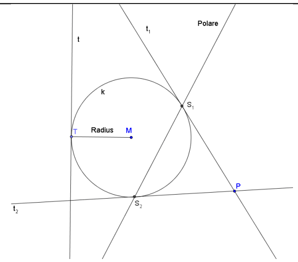
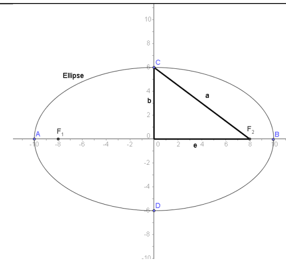
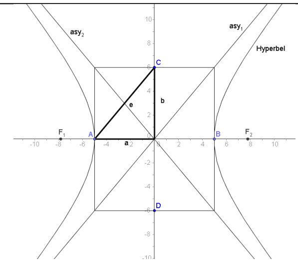
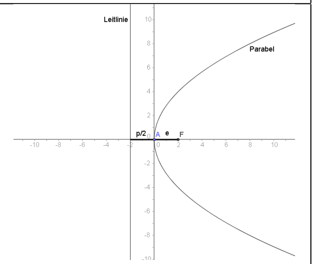
Der Schnittwinkel φ zweier Kegelschnitte ist der Winkel, den die in einem der Schnittpunkte an die beiden Kegelschnitte errichteten Tangenten miteinander einschließen.

4.12 Gemeinsame Tangenten an zwei Kegelschnitte

Berührt eine Gerade zwei Kegelschnitte, so heißt sie gemeinsame Tangente.

4.13 Extremwertaufgaben der analytischen Geometrie

4.14 Zusammenfassung Kegelschnitte

	Kreis	Ellipse	Hyperbel	Parabel
				
				
Eigenschaft	$\overline{XM} = r$, M$(u\|v)$	$\left\|\overline{XF_1} + \overline{XF_2}\right\| = 2a$	$\left\|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}\right\| = 2a$	$\overline{Xl} = \overline{XF}$
Gleichungen	$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	$y^2 = 2px$
(1. Hauptlage)	$M(0\|0): \quad x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Lin. Exzentrizität		$e^2 = a^2 - b^2$	$e^2 = a^2 + b^2$	$e = \frac{p}{2}$
Berührbedingung	$(k \cdot u - v + d)^2 = r^2(k^2+1)$ $M(0\|0)$: $d^2 = r^2(k^2+1)$	$a^2k^2 + b^2 = d^2$	$a^2k^2 - b^2 = d^2$	$p = 2kd$
Spaltformel $T(x_1\|y_1)$	$(x-u)(x_1-u) + (y-v)(y_1-v) = r^2$	$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$	$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$	$yy_1 = p(x+x_1)$
Asymptoten			$y = \pm\frac{b}{a}x$	

Setzt man in die Spaltformel einen Punkt $T(x_1|y_1)$ ein,...
...der Element des Kegelschnitts ist, erhält man die **Tangente** in diesem Punkt.
...der nicht auf dem Kegelschnitt liegt, erhält man die **Polare**!