Beweis für $\sin'(x) = \cos(x)$

Um eine Funktion abzuleiten, müssen wir den Differentialquotienten berechnen:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

Wegen des Zusammenhanges

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \text{(Additionstheorem)}$$

kann man umformen zu ($\alpha = x_0 + h$, $\beta = x$)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \cos\frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]$$

Nun strebt aber (siehe unten) der Ausdruck

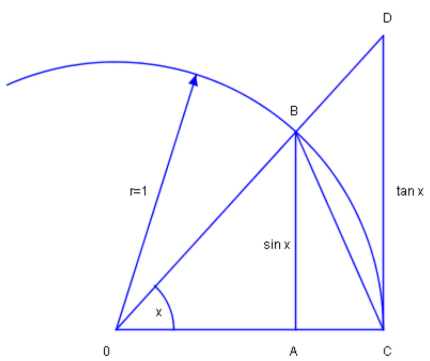
$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

für $h \longrightarrow 0$ gegen 1. Somit strebt der Ausdruck insgesamt für $h \longrightarrow 0$ gegen $\cos x_0$:

$$\boxed{f'(x_0) = \cos x_0}$$

Zu zeigen bleibt, dass $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt gemäß der Skizze:

$$\begin{array}{ccccc}
A_{\Delta 0CB} & < & A_{\text{Sektor } 0CB} & < & A_{\Delta 0CD} \\
\frac{1 \cdot \sin x}{2} & < & \frac{1^2 \cdot x}{2} & < & \frac{1 \cdot \tan x}{2} \\
\sin x & < & x & < & \tan x \\
1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x} \\
1 & > & \frac{\sin x}{x} & > & \cos x \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
1 & & & & 1
\end{array}$$



Ergebnis: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$