Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik

Die Formulierung der Grundkompetenzen (GK) bezieht sich auf den Stand von März 2013 (Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, <https://www.bifie.at/node/1442>).

Algebra und Geometrie	5. Kl	6. Kl	7. Kl	8. Kl
1. Grundbegriffe der Algebra				
AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können.	✓	✓	✓	✓
AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme; Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit	✓	✓	✓	✓
Anmerkung: Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen. Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.				
2. (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme				
AG 2.1 Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
AG 2.2 Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
AG 2.3 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können.	✓	✓	✓	✓
AG 2.4 Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können		✓	✓	✓
AG 2.5 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können.	✓	✓	✓	✓
Anmerkung: Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten. Umformungen von Termen, Formeln oder Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen beschränken sich auf Fälle geringer Komplexität.				

3. Vektoren				
AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können.	✓	✓	✓	✓
AG 3.3 Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können.	✓	✓	✓	✓
AG 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können.	✓	✓	✓	✓
AG 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können.	✓	✓	✓	✓
<p>Anmerkung: Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.</p> <p>Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.</p>				
4. Trigonometrie				
AG 4.1 Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen können.	✓	✓	✓	✓
AG 4.2 Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können.	✓	✓	✓	✓
<p>Anmerkung: Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.</p>				

Funktionale Abhängigkeiten	5. Kl	6. Kl	7. Kl	8. Kl
1. Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften				
FA 1.1 Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktion betrachten kann.	✓	✓	✓	✓
FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können.	✓	✓	✓	✓
FA 1.3 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können.	✓	✓	✓	✓
FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen.	✓	✓	✓	✓
FA 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen graphisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können.	✓	✓	✓	✓
FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können.	✓	✓	✓	✓
FA 1.8 Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können.	✓	✓	✓	✓
FA 1.9 Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können.	✓	✓	✓	✓
<p>Anmerkung: Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$).</p> <p>Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.</p> <p>Das rechnerische Ermitteln von Schnittpunkten von Funktionen beschränkt sich auf jene Fälle, die durch die im Inhaltsbereich Algebra und Geometrie angeführten Grundkompetenzen abgedeckt sind (lineare, quadratische Gleichungen).</p> <p>Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.</p>				

2. Lineare Funktionen $f(x) = kx + d$				
FA 2.1 Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.	✓	✓	✓	✓
FA 2.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
FA 2.3 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.	✓	✓	✓	✓
FA 2.4 Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x + 1) = f(x) + k; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$	✓	✓	✓	✓
FA 2.5 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können.	✓	✓	✓	✓
FA 2.6 Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können.	✓	✓	✓	✓
Anmerkung: Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.				
3. Potenzfunktionen mit $f(x) = ax^z + b, z \in \mathbb{Z}$ oder mit $f(x) = ax^{\frac{1}{2}} + b$				
FA 3.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.	✓	✓	✓	✓
FA 3.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
FA 3.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können.	✓	✓	✓	✓
FA 3.4 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können.	✓	✓	✓	✓
Anmerkung: Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall $a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ beschränkt.				

4. Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$				
FA 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen.	✓	✓	✓	✓
FA 4.2 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können.	✓	✓	✓	✓
FA 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumente ermitteln können.	✓	✓	✓	✓
FA 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen.	✓	✓	✓	✓
<p>Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$. Argumentwerte sollen aus Tabellen und Graphen, für Polynomfunktionen bis $n = 2$ und solchen, die sich durch einfaches Herausheben oder einfache Substitution auf quadratische Funktionen zurückführen lassen, auch aus der jeweiligen Funktionsgleichung ermittelt werden können.</p>				
5. Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$				
FA 5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können		✓	✓	✓
FA 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 5.3 Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^λ) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können		✓	✓	✓
FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 5.5 Die Begriffe <i>Halbwertszeit</i> und <i>Verdoppelungszeit</i> kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können		✓	✓	✓
<p>Anmerkung: Die Parameter a und b (bzw. e^λ) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.</p>				

6. Sinusfunktion, Cosinusfunktion				
FA 6.1 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können		✓	✓	✓
FA 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 6.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 6.5 Wissen, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$		✓	✓	✓
FA 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$			✓	✓
Anmerkung: Während zur Auflösung von rechtwinkligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.				

Analysis	5. Kl	6. Kl	7. Kl	8. Kl
1. Änderungsmaße				
AN 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können		✓	✓	✓
Anmerkung: Die Berechnung einfacher Differenzenquotienten ist/wird damit auch umsetzbar/möglich.				
AN 1.2 Den Zusammenhang <i>Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate)</i> auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können			✓	✓
AN 1.3 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können			✓	✓
AN 1.4 Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzgleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können				✓
Anmerkung: Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{kx}]' = k \cdot e^{kx}$.				
2. Regeln für das Differenzieren				
AN 2.1 Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten)			✓	✓
Anmerkung: Im Teil Vernetzung von Grundkompetenzen können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.				

3. Ableitungsfunktion/Stammfunktion				
AN 3.1 Den Begriff <i>Ableitungsfunktion/Stammfunktion</i> kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können				✓
AN 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können			✓	✓
AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen			✓	✓
Anmerkung: Der Begriff der Ableitung(sfunktion) soll verständlich und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.				
4. Summation und Integral				
AN 4.1 Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können				✓
AN 4.2 Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)dx$, $\int f(k \cdot x)dx$ (vgl. Inhaltsbereich <i>Funktionale Abhängigkeiten</i>), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können				✓
Anmerkung: Im Teil <i>Vernetzung von Grundkompetenzen</i> können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Integrationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.				
AN 4.3 Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können				✓
Anmerkung: Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Die Berechnung bestimmter Integrale soll sich auf Polynomfunktionen beschränken.				

Wahrscheinlichkeit und Statistik	5. Kl	6. Kl	7. Kl	8. Kl
1. Beschreibende Statistik				
WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können		✓	✓	✓
Anmerkung: (un-)geordnete Liste, Strichliste, Piktogramm, Säulen-, Balken-, Linien-, Stängel-Blatt-, Punktwolkendiagramm, Histogramm (als Spezialfall eines Säulendiagramms), Prozentstreifen, Kastenschaubild				
WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können		✓	✓	✓
WS 1.3 Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können		✓	✓	✓
WS 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können		✓	✓	✓
Anmerkung: Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median (auch als Quartilen) müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitive Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständlich eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).				
2. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung				
WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können		✓	✓	✓
WS 2.2 Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können		✓	✓	✓
WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können		✓	✓	✓
Anmerkung: Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.				
WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können			✓	✓

3. Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)				
WS 3.1 Die Begriffe <i>Zufallsvariable</i> , (<i>Wahrscheinlichkeits-</i>) <i>Verteilung</i> , <i>Erwartungswert</i> und <i>Standardabweichung</i> verständig deuten und einsetzen können			✓	✓
WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen			✓	✓
WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann			✓	✓
WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können			✓	✓
<p>Anmerkung: Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung $np(1-p) \geq 9$ erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion ϕ der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Arbeiten mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.</p>				
4. Schließende/Beurteilende Statistik				
WS 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekanntem Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können				✓