Theoretische Fragen zu Grenzwert, Stetigkeit, Lücke, stetige Ergänzung, echt/unecht gebrochenrationale Funktion, Kurvendiskussion

Unter welchen zwei Gegebenheiten ist eine Funktion an der Stelle $x = a$ stetig?

Eine reelle Funktion $f(x)$ heißt an der Stelle $x = a$ stetig, wenn dort Grenzwert und Funktionswert existieren und übereinstimmen: $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$

In welchem Punkt ändert sich die Krümmung eines Graphen?

Wendepunkt

Welche zwei (hinreichenden) Bedingungen müssen für eine lokale Maximumstelle/Minimumstelle/Wendestelle erfüllt sein?

Maximumstelle:	$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$
Minimumstelle:	$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$
Wendestelle:	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$

Erläutere was ein Sattelpunkt ist!

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

In welchem lokalen Punkt hat ein Graph die größte Steigung?

Wendepunkt

Welche Bedingung erfüllen zwei Graphen, die einander im Punkt P$(x|y)$ berühren/rechtwinklig schneiden?

berühren:	$f'(x) = g'(x)$
rechtwinklig schneiden:	$f'(x) = -\frac{1}{g'(x)}$

Erläutere was ein Pol ist und gib ein Beispiel einer Funktion mit Polstelle an!

Sofern der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion an einer Stelle $x = a$ gleich null ist, ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert. Wenn nun der Zähler bei $x = a$ ungleich null ist, sagt man: Die Funktion besitzt an dieser Stelle einen Pol (eine „Unendlichkeitsstelle“).
Beispiele: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$, $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Erläutere was eine Lücke ist! Was bedeutet „stetige Behebung einer Definitionslücke“?

Wird für einen x-Wert Zähler und Nenner einer gebrochenrationalen Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ gleichzeitig null, so hat die Funktion an dieser Stelle eine Lücke.

Die Definitionslücke einer Funktion $f(x)$ kann stetig ergänzt werden, indem man den Bruch kürzt und durch den Wert des gekürzten Bruches ersetzt.

Was ist der Unterschied einer echt und einer unecht gebrochen rationalen Funktion?

Ist der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, so handelt es sich um eine echt gebrochenrationale Funktion. Ist der Grad des Zählerpolynoms allerdings gleich oder größer als der Grad des Nennerpolynoms, so spricht man von einer unecht gebrochenrationalen Funktion.

Begründe warum eine Polynomfunktion dritten Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzen muss.

Eine Funktion dritten Grades hat als Wertebereich die reellen Zahlen und muss daher die x-Achse mind. einmal schneiden.