Begriff der Stetigkeit und der Unstetigkeitsstelle

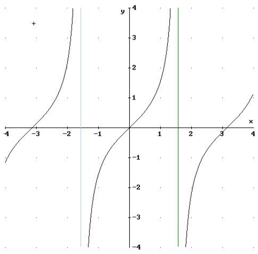
(Zeichnen ohne abzusetzen)
Die meisten Funktionen, die in den Anwendungen vorkommen, sind **stetig**, d.h., bei kleinen Änderungen des Arguments einer stetigen Funktion $y(x)$ ändert sich diese auch nur geringfügig. Die graphische Darstellung einer solchen Funktion ergibt eine zusammenhängende Kurve. Ist dagegen die Kurve an verschiedenen Stellen unterbrochen, dann heißt die zugehörige Funktion **unstetig**, und die Werte des Arguments, an denen die Unterbrechung auftritt, heißen Unstetigkeitsstellen.

Linksseitige Stetigkeit in a: Eine Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$, die in einem Intervall $(b; a]$ mit $b < a$ definiert ist, heißt in a linksseitig stetig, wenn der linksseitige Grenzwert $L = \lim_{x \to a-} f(x)$ existiert[1] und $L = f(a)$ ist.

Rechtsseitige Stetigkeit in a: Eine Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$, die in einem Intervall $[a; b)$ mit $a < b$ definiert ist, heißt in a rechtsseitig stetig, wenn der rechtsseitige Grenzwert $R = \lim_{x \to a+} f(x)$ existiert und $R = f(a)$ ist.

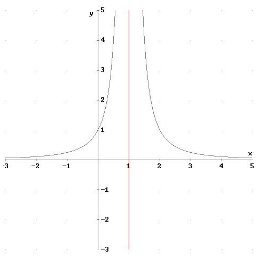
Stetigkeit in a: Existieren bei einer Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ die beiden Grenzwerte R und L und stimmen sie mit dem Funktionswert $f(a)$ überein, so heißt f in a **stetig**.

Beispiele für unstetige Funktionen:



$f(x) = \tan x$ ist in $k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) unstetig.

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$$
$$R = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$$
$$L \neq R$$



$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ist an der Stelle $x = 1$ unstetig.

$$L = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$
$$R = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Es existieren keine unendlichen Grenzwerte!

Stetige Behebung einer Definitionslücke: Gehört a nicht zum Definitionsbereich, existieren aber $L = \lim_{x \to a-} f(x)$ und $R = \lim_{x \to a+} f(x)$ und gilt $L = R$, so kann $f : x \mapsto y = f(x)$ durch die Zusatzdefinition $f(x) := L = R$ stetig in a fortgesetzt werden (“stetige Behebung einer Definitionslücke”).

[1]. . . Ein Grenzwert existiert, wenn er endlich ist.

Stetigkeit & Unstetigkeit elementarer Funktionen

Die elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig; Unstetigkeitsstellen gehören nicht zum Definitionsbereich. Es können die folgenden allgemeinen Aussagen gemacht werden:

1. Ganzrationale Funktionen oder Polynome sind auf der gesamten Zahlengerade stetig.

2. Gebrochenrationale Funktionen: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit den Polynomen $P(x)$ und $Q(x)$ sind überall stetig, ausgenommen die x-Werte, für die $Q(x) = 0$ ist. An Stellen $x = a$, für die $Q(x) = 0$ aber $P(x) \neq 0$ gilt, besitzt die Funktion eine Unstetigkeitsstelle mit einem Verlauf ins Unendliche, die **Pol** genannt wird. Ist der Wert a sowohl Nullstelle des Nenners als auch des Zählers, dann gibt es nur dann einen Pol, wenn die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners größer ist als die des Zählers. Anderenfalls ist die Unstetigkeit hebbar.

3. Irrationale Funktionen: Wurzeln (mit ganzzahligen Wurzelexponenten) aus Polynomen sind für alle x-Werte, die zum Definitionsbereich gehören, stetige Funktionen. Auf dem Rande der Definitionsbereiche können sie mit einem endlichen Wert abbrechen, wenn der Radikand von positiven zu negativen Werten überwechselt. Wurzeln aus gebrochenrationalen Funktionen sind für solche x-Werte unstetig, für die der Radikand eine Unstetigkeitsstelle besitzt.

4. Trigonometrische Funktionen: Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind überall stetig; $\tan x$ und $\sec x$ besitzen an den Stellen $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ unendliche Sprünge; $\cot x$ und cosec x besitzen bei $x = n\pi$ unendliche Sprünge ($n \in \mathbb{Z}$).

5. Inverse trigonometrische Funktionen: Die Funktionen $\arctan x$ und arccot x sind überall stetig, $\arcsin x$ und $\arccos x$ brechen an den Grenzen ihres Definitionsbereiches wegen $-1 \leq x \leq +1$ ab.

6. Exponentialfunktionen: Die Exponentialfunktionen e^x oder a^x mit $a > 0$ sind überall stetig.

7. Logarithmische Funktionen: Die logarithmische Funktion $\log x$ mit beliebiger positiver Basis ist für alle positiven x-Werte stetig und bricht an der Stelle $x = 0$ wegen $\lim_{x\to+0} \log x = -\infty$ ab.

8. Zusammengesetzte elementare Funktionen: Die Stetigkeit muß für alle x-Werte der einzelnen elementaren Funktionen, die in dem zusammengesetzten Ausdruck enthalten sind, entsprechend den oben angeführten Fällen untersucht werden.

Differenzierbarkeit

(Zeichnen ohne Knick; Gegenbeispiel: $y = |x|$)

Ableitung einer Funktion (Differentialquotient): Die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ ist eine neue Funktion von x, die mit den Symbolen y', Dy, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $Df(x)$ oder $\frac{df(x)}{dx}$ gekennzeichnet wird und die für jeden Wert von x gleich dem Grenzwert des Quotienten aus dem Zuwachs der Funktion Δy und dem entsprechenden Zuwachs Δx für $\Delta x \to 0$ ist:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differenzierbarkeit: Die Existenz der Ableitung einer Funktion $f(x)$ für die Werte der Variablen x ist gegeben, wenn für diese Werte der Differentialquotient $f'(x)$ einen endlichen Wert besitzt.
Existiert in einem Punkt x keine Ableitung, dann hat die Kurve in dem betreffenden Punkt entweder keine bestimmte Tangente oder diese bildet mit der x-Achse einen rechten Winkel. Im zweiten Falle ist der Grenzwert $f'(x)$ unendlich. Man schreibt für diesen Sachverhalt $f'(x) = +\infty$ bzw. $-\infty$.

Ein Beispiel für eine stetige, aber nicht differenzierbare Funktion:

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = +1$$

Bei der Betragsfunktion existieren die einseitigen Ableitungen (rechtsseitige = linksseitige Differenzierbarkeit), stimmen aber nicht überein. Daher kann der Grenzwert der Differenzenquotienten, also die Ableitung $f'(0)$, nicht existieren.