Einführung in die Grenzwerte

Dieser Text folgt hauptsächlich der Notwendigkeit in sehr kurzer Zeit eine Idee und Teile ihrer Anwendung zu präsentieren, so dass relativ schnell mit dieser Idee gerechnet werden kann. Der Grenzwert wird oft wesentlich detaillierter dargestellt, was eigentlich auch notwendig ist, will man die Theorie dahinter verstehen. Hier tritt an die Stelle der mathematischen Genauheit öfters das sog. “hand-waving”, sprich das mit dem Händen in der Luft etwas andeuten.

Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge ist genau das, wonach es klingt, nämlich eine Folge von Zahlen, z.B. 3, 5, 7, 9. Das hier ist eine **endlich Folge**, nämlich die der ungeraden Zahlen bis 10. Ebenso kann ich auch **unendliche Folgen** konstruieren, z.B. die der ungeraden Zahlen, indem ich bei der kleinsten anfange: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...
Es besteht keine Schwierigkeit, diese Folge beliebig fortzusetzen. Man muss einfach immer zwei weitergehen. Will man aber alle Glieder dieser Folge aufschreiben besteht in der Tat eine Schwierigkeit, denn es sind unendlich viele, und man lebt nur eine endlich lange Zeit, welche man im Zweifelsfall auch nicht mit dem Aufschreiben immer größerer ungerader Zahlen verbringen will. Also wäre es praktisch, wenn man eine Art Formel hätte, die einem sagt, wie die Folge im Allgemeinen aussieht.

Glücklicherweise ist das hier nicht sonderlich schwer, wenn man einmal darüber nachdenkt. Die Folge bestand aus den ungeraden Zahlen. Die *geraden* Zahlen sind die, die man durch 2 teilen kann. *Gerade* Zahlen kann man also aufschreiben, indem man eine bestimmt Zahl mit 2 multipliziert, um die gewünschte Zahl zu erhalten. Ich nehme mir also eine ganze Zahl **n** und multipliziere sie mit 2. Das gibt mir $2 \cdot n$, oder $2n$, und das ist eine gerade Zahl. Wenn ich eine ungerade Zahl haben will, muss ich also nur noch Eins addieren, denn nach einer geraden Zahl kommt eine ungerade. Dann habe ich also $2n+1$, wobei n eine ganze Zahl ist. Zur Übung (und um zu sehen, dass das hier wirklich ungerade Zahlen liefert) sollte man hier 3 oder 4 ganze Zahlen in n einsetzen, um zu überprüfen, ob $2n + 1$ dann wirklich eine ungerade Zahl ergibt.

Damit haben wir die “Formel” für die Zahlenfolge der ungeraden Zahlen. Sie lautet $2n + 1$. Man spricht bei so etwas nicht von einer Formel, sondern von eine **Vorschrift**, ähnlich wie man bei einer Funktion von einer **Funktionsvorschrift** spricht. Formal aufgeschrieben, würde das so aussehen:

Die Folge a_n sei die Folge der ungeraden Zahlen. Dann gilt für a_n: $a_n = 2n+1$ wobei n eine ganze Zahl ist.

Was habe ich damit erreicht? Ich habe mir etwas einfallen lassen, wie ich kurz und knapp auch unendliche Zahlenfolgen aufschreiben kann, falls (!) ich in den Zahlenfolgen eine Regelmäßigkeit entdecke. Zur Übung sollte man einmal versuchen, die Regelmäßigkeit in den folgenden Zahlenreihen zu entdecken und aufzuschreiben:
a_n = 1, 5, 9, 13, 17, 21,...
b_n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...
c_n = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,...
d_n = -1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 38,...
e_n = 1, 2, 4, 8, 16, 32,...

Lösung Übungsaufgabe: $a_n = 4n + 1$, $b_n = 2n + 3$, $c_n = n^2$, $d_n = n^2 - 1$, $e_n = 2^n$

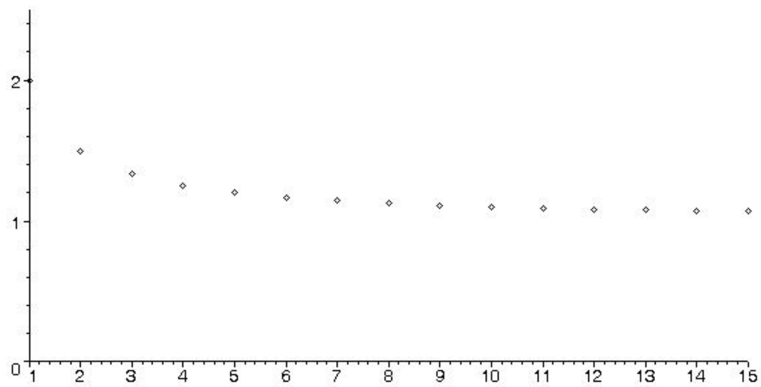
Die Grundidee des Grenzwertes

Jetzt mag man sich fragen, was das mit dem Grenzwert zu tun haben soll. Der Grenzwert kommt ins Spiel, wenn man sich die Frage nach einem ganz bestimmten Folgeglied stellt. Nehmen wir als Beispiel wieder die Folge der ungeraden Zahlen $a_n = 2n + 1$. Mit Hilfe dieser Vorschrift, kann man sagen, was die siebenunddreißigste ungerade Zahl ist, indem ich $n = 37$ setzte und das dann ausrechne. Man kann sich schließlich auch die Frage stellen, was das letzte Folgeglied ist. Dafür reicht es nicht aus, für n eine große Zahl zu nehmen, wie z.B. $1.000.000.000.000.000.000.000.000$. Damit rechne ich zwar eine sehr große ungerade Zahl aus, aber diese ist nicht das letzte Folgeglied, denn ich kann ja immer noch n um Eins, Zwei, Zehn oder $1.000.000.000.000.000.000.000.000$ größer wählen. Ich muss mich also damit beschäftigen, was geschieht, wenn n unendlich groß wird. Dafür benötigt man schließlich den **Grenzwert**, auch **Limes** genannt.

In diesem Beispiel interessiert mich was geschieht, wenn n unendlich groß wird. Die Antwort ist hier ausnahmsweise so einfach wie es aussieht. Ich verdoppele eine unendlich große Zahl und zähle dann noch Eins dazu. Was soll dabei schon anderes herauskommen als eine unendlich große Zahl? (WARNUNG: Selten sind Grenzwerte so einfach zu bestimmen!!!) Also kann man sagen, der Grenzwert der Folge $a_n = 2n + 1$ ist Unendlich, wenn n gegen Unendlich geht. Das gleiche gilt auch für die Folgen aus der obigen Aufgabe, da diese alle ständig größer werden. (Man sagt dazu auch, die Folge ist **monoton wachsend** oder **monoton steigend**.)

Die formale Definition des Grenzwertes

Formal stellt man sich den Grenzwert einer Zahlenfolge so vor:
Man zeichnet die Zahlenfolge in ein Koordinatensystem, so wie eine Funktion. Auf der x-Achse zeichnet man das wachsende n ab, darüber mit der y-Achse das zu einem bestimmten n gehörende Folgeglied a_n.
Für die Folge $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ sieht das dann so aus:

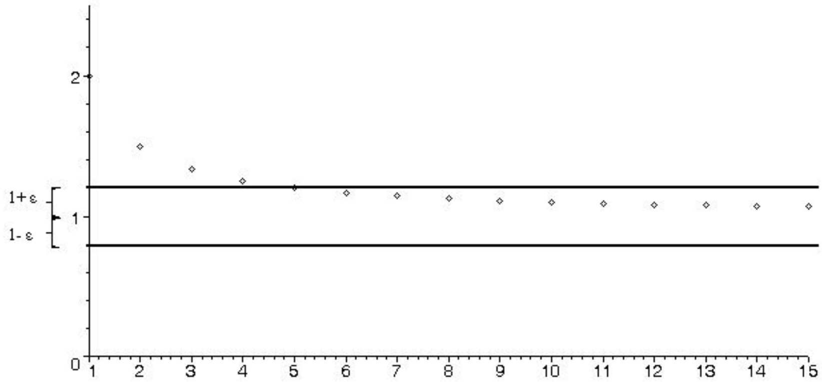


Die dazugehörige Wertetabelle:

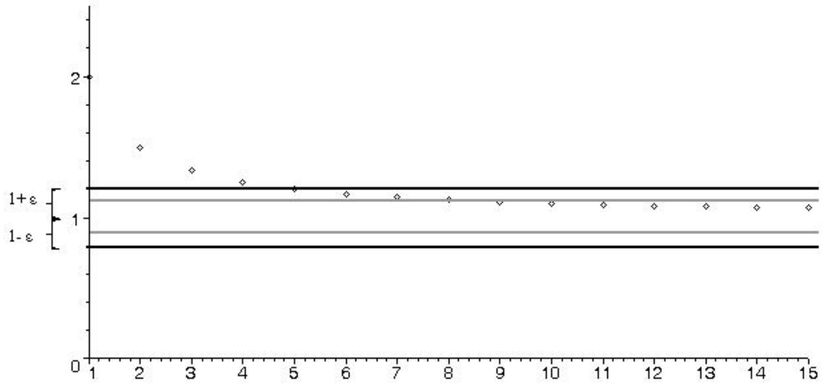
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	2	1,5	1,33	1,25	1,2	1,166	1,1429	1,125	1,111	1,1	1,0909	1,0833	1,0769	1,0714	1,0667

Würde man immer weiter rechnen, so bekäme man heraus, dass sich die Nachkommastellen hinter der Eins immer weiter verringern. Je weiter ich mit größer werdendem n rechne, um so kleiner wird das Folgeglied a_n. Dabei liegen die Werte der Folge immer näher an 1. Sie werden allerdings nicht kleiner als 1. Würde ich also einen “Schlauch” um 1 legen, so lägen ab einem bestimmten Folglied alle weiteren Folgeglieder innerhalb dieses Schlauchs.

Bildlich sollte man sich das so vorstellen:



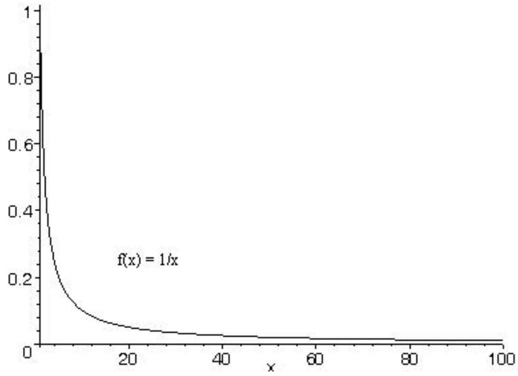
Ich sehe, dass die ersten 3 Folgeglieder außerhalb des Schlauchs liegen, das vierte liegt irgendwie auf dem Rand, und alle unendlich vielen weiteren Folgeglieder liegen innerhalb des Schlauchs. Nach meinen Berechnungen in der obigen Wertetabelle liegen die Folgeglieder immer näher an 1. Würde ich also meinen Schlauch etwas enger um die Eins ziehen, so würden zu Anfangs einige Folgeglieder mehr außerhalb des Schlauchs liegen. Allerdings folgen auf diese paar Folgeglieder wieder unendlich viele Folgeglieder, die innerhalb des verengten Schlauchs liegen, wie hier in der nächsten Grafik angedeutet.



Indem wir immer größere Zahlen in n einsetzen und sie ausrechnen, betreiben wir das, was wir eben schon gemacht haben. Im Endeffekt lassen wir n gegen Unendlich gehen. Ein Unterschied ist allerdings, dass wir hier keine Folge haben, deren Zahlen immer größer werden, sondern sie werden immer kleiner. (Man sagt dazu in Analogie zum Oberen: Die Folge ist *monoton fallend*.) Eben wurde unsere Folge unendlich groß. Diese hier wird zwar kleiner, aber sie wird nicht beliebig klein. Zu Eins addieren wir immer wieder $\frac{1}{n}$. Das ist ein immer kleiner werdender Bruch, der aber nicht Null wird, solange ich größerwerdende Zahlen für n einsetze. (Man sagt, die Folge ist *nach unten beschränkt*, da es eine Schranke gibt, unter die sie nicht fällt.)

Wenn also n gegen Unendlich geht, was ist die Konsequenz, sprich was ist der Grenzwert der Folge a_n für n gegen Unendlich? Der Bruch wird immer kleiner für größere

n, erreicht n Unendlich wird er schließlich Null. Zur Begründung dafür muss hier diese Grafik reichen:



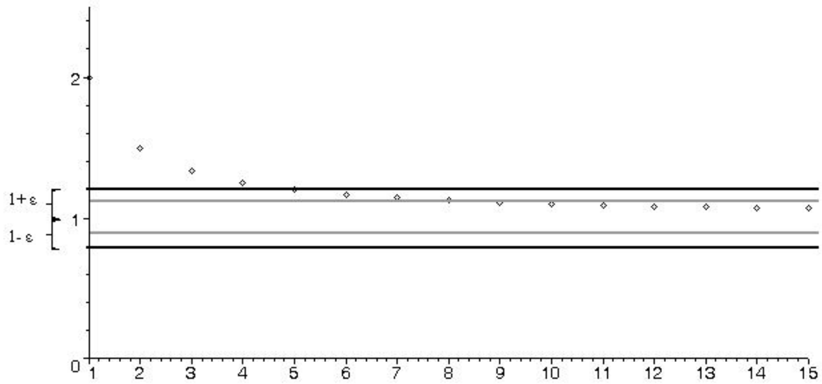
Der Bruch $\frac{1}{n}$ wird also zu Null, damit bleibt als Ergebnis des Grenzwertes $1 + 0 = 1$ übrig. In Worte gefasst: Für n gegen Unendlich ist der Grenzwert von a_n gleich 1. Dazu sagt man auch: Für n gegen Unendlich, **konvergiert** die Folge gegen 1.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Zusammengefasst ergeben diese Beobachtungen das Folgende:
Wenn eine Folge a_n monoton fällt bzw. steigt **und** wenn sie nach unten bzw. oben beschränkt ist, dann konvergiert sie gegen ihren Grenzwert a. Das bedeutet, dass ich einen immer kleiner werdenden Schlauch um ihre Folgeglieder legen kann, und dann immer das gleiche geschieht:
Alle Folgeglieder bis zu einem bestimmten N mit dem zugehörigen Folgeglied a_N liegen außerhalb des Schlauches, alle unendlich vielen weiteren Folgeglieder a_n mit n $>$ N liegen innerhalb des Schlauches. Und das gilt immer, egal wie klein ich den Schlauch mache.

Wie sich das gehört, lässt sich dieser Gedankengang natürlich in eine auf der ersten Blick völlig unverständliche mathematisch Definition fassen. Die soll gleich folgen, es fehlt nur noch eine Überlegung dafür. Man muss sich noch überlegen, wie der Abstand zwischen einem Folgeglied a_n und dem Grenzwert in einem immer enger werdenden Schlau formal erfasst werden kann. Das macht man wie folgt:
Ich wähle mir als Breite des Schlauches eine positive Zahl, klassischerweise nimmt man hierfür den griechischen Buchstaben Epsilon. (Das ist das Zeichen in den obigen Grafiken, das aussieht wie ein verkümmertes großes Druckschrift E.) Der Abstand zwischen einem Folgeglied a_n und dem Grenzwert a ist a_n - a. Da diese Zahl auch negativ werden könnte, nehme ich davon den Absolutbetrag, denn ich will ja, dass mein Abstand eine positive Zahl ist. Also ist der Abstand von einem beliebigen Folgeglied a_n zum Grenzwert a gleich $|a_n - a|$.

Eben haben wir festgestellt, dass ich mir einen Schlauch der Breite ε wählen kann, und dann ab einem N alle Folgeglieder a_n mit n $>$ N innerhalb des Schlauches liegen. Das bedeutet, dass der Abstand zwischen Folgeglied und Grenzwert kleiner ist als der Schlauch breit ist. Wem das jetzt noch nicht klar ist, empfehle ich einen langen Blick auf diese Grafik.



Damit kommen wir endlich zur formalen Definition des Grenzwertes.
Es sei eine Folge a_n gegeben. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. a_n konvergiert für n gegen Unendlich genau dann gegen den Grenzwert a, wenn eine ganze Zahl N existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Die praktische Bestimmung von Grenzwerten - Rechnungen

Natürlich kann man auch Grenzwerte anders bilden als nur für n gegen Unendlich. Man kann n gegen jede erdenkliche Zahl laufen lassen. Das kann zu sehr einfachen Rechnungen führen, aber auch zu mächtig komplizierten. Soll man den Grenzwert einer Folge ausrechnen, können einem einige Rechentricks und die Kenntnis einiger Grenzwerte von bestimmten Folgen helfen. Einige dieser Basis-Folgen sollen hier aufgeführt werden.

Wir beginnen mit $a_n = \frac{1}{n}$. Lässt man n gegen Unendlich gehen, so wird a_n immer kleiner, bleibt aber eine positive Zahl. Der Grenzwert von a_n ist also 0.
Noch einfacher ist es bei Folgen der Art a_n = n, $a_n = n^2$ oder $a_n = n^3$. Für immer größer werdendes n werden auch diese Folgen unbeschränkt immer größer, der Grenzwert ist dann Unendlich.
In diesem Zusammenhang merke man sich auch, dass wenn eine Folge a_n gilt, dass sie gegen Unendlich geht, so geht ihr Kehrwert $\frac{1}{a_n}$ gegen Null. So ist also der Grenzwert von $\frac{1}{{a_n}^2}$ gleich Null für n gegen Unendlich. Beachten sollte man auch die Vorzeichen. Ist die Folge $a_n = -n$ gegeben, so geht sie gegen $-\infty$ falls n gegen ∞ geht.

Beim Ausrechnen von Grenzwerten bedient man sich einiger Rechentricks, wie z.B. bei der Folge $a_n = n^2 - n$. Diesen berechnet man, indem man Grenzwerte teilweise bestimmt, wie folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 - n = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty$$

Wieso gehe ich hier so vor und was ist passiert? Wenn ich den Limes einfach so bilden will, stehe ich vor dem Problem, dass ich Unendlich von Unendlich abziehen muss. Was das sein soll weiß niemand, denn dieser Ausdruck ist nicht definiert. Also hebe ich n^2 heraus, und erhalte so innerhalb der Klammer die Nullfolge $\frac{1}{n}$, d.h. eine Folge, die gegen Null geht für n gegen Unendlich. Damit geht der Inhalt der Klammer gegen 1, und da n^2 gegen Unendlich geht, geht der gesamte Ausdruck gegen Unendlich.

Auch kann ich beim Bestimmen des Grenzwertes Brüche kürzen, so wie im folgenden Beispiel, in dem die Folge ein Bruch ist.

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 + n^5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3 + n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + n^3} = 0$$

Weil ich hier n^2 ausklammern kann, erhalte ich im Nenner des Bruchs ein Folge, die gegen Unendlich geht. Somit ist der Grenzwert dieser Folge Null.

Als letztes ein Beispiel, bei dem der Grenzwert nicht existiert. Ich betrachte die Folge a$_n = (-1)^n$. Diese Folge ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, denn sie nimmt immer abwechselnd für gerade n den Wert 1 und für ungerade n den Wert -1 an. Damit ist sie nicht monoton. Da wir oben gesehen haben, dass eine Folge dann und nur dann konvergiert, wenn sie beschränkt und monoton ist, konvergiert diese Folge nicht. Mit anderen Worten, es lässt sich einfach kein Grenzwert bestimmen.